Math. P. 704

Math. Geom. applic. 450.

R

Aufgaben
aus der
Körperlehre.

Zum Gebrauch
für den Unterricht
in der
niederen und höheren Analysis
herausgegeben
von
C. L. Lehmus
Doctor der Philosophie.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Mit fünf Kupfertafeln.

Halle und Berlin,
in den Buchhandlungen des Hallischen Waisenhauses.
1811.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Seinem

geliebten Vater

dem Herrn

M. Christian Balthasar Lehmus

Prediger in Adelshofen bei Rothenburg
an der Tauber

mit

der innigsten Kindesliebe

zugeeignet

von

dem Verfasser.

Vorrede.

Da, so viel mir bekannt, noch keine Sammlung von Aufgaben aus der Körperlehre gedruckt ist, und mein noch daurendes Verhältniß als Privatlehrer der Mathematik, seit acht Jahren mir Gelegenheit gab, auf manche interessante stereometrische Probleme zu stoßen, deren oft verwickelte Auflösungen mich und meine Zuhörer angenehm beschäftigten, so hielt ich es nicht für ganz unzweckmäßig, diese so entstandene Sammlung dem Druck zu über-

geben. Der, der sich im höheren Calcul üben will, wird hier wohl Gelegenheit zu Erreichung seines Zweckes und zur Uebung im Nachdenken finden, der Practiker aber manche brauchbare Formel. Der gebrauchten Integral-Formeln sind wenige, und zwar solche, die dem, der höhere Analysis nur einigermaßen studiert hat, gewiß bekannt sind.

Berlin, den 3ten April 1811.

Der Verfasser.

Aufgaben aus der Körperlehre.

Aufgabe 1.

Es ist der körperliche Inhalt a, und die gesammte begrenzende Fläche b, eines senkrechten Cylinders gegeben; man sucht den Halbmesser x seiner Grundflächen, und seine Höhe y.

Auflösung.

Das Produkt aus Grundfläche in Höhe bestimmt den Inhalt des Cylinders, also ist

$$1)\quad x^2 \pi y = a,$$

wenn nämlich hier, und durchaus in der Folge, π die Peripherie des Kreises bezeichnet, dessen Durchmesser $= 1$ ist.

Den Mantel eines senkrechten Cylinders bestimmt das Produkt aus der Peripherie der Grundfläche in die Höhe, also ist derselbe $= 2\,x\,\pi\,y$; folglich

$$2)\quad 2\,x\,\pi\,y + 2\,x^2\,\pi = b.$$

Aus 1, folgt $y = \frac{a}{x^2 \pi}$; diesen Werth für y in 2, substituirt, gibt

$\frac{2\,a}{x} + 2\,x^2\,\pi = b$; und wenn man diese Gleichung mit

x multiplicirt, mit 2 π dividirt und ordnet, so findet man

$$x^3 - \frac{b}{2\pi} x + \frac{a}{\pi} = 0.$$

Ist a = 500; b = 350; so findet man x = 4,043 ... und y = 9,741 ...

Anmerkung. Hätte man a = 500, b aber etwa nur = 10, angenommen, so könnte diese Aufgabe unmöglich seyn, indem vielleicht kein Cylinder existiren kann, der bei einem so großen Inhalt eine so geringe Fläche, oder bei einer so geringen Fläche einen so großen Inhalt hat. Diese beiden Grenzen der Möglichkeit sollen in den zwei folgenden Aufgaben bestimmt werden.

Aufgabe 2.

Der körperliche Inhalt eines senkrechten Cylinders sey = a; wie müssen seine Abmessungen genommen werden, damit die begrenzende Fläche am kleinsten werde?

Auflösung.

Die Bezeichnung sey wie in Aufgabe 1, so sind die beiden Gleichungen

1) $x^2 \pi y = a$,

2) $2 x \pi y + 2 x^2 \pi =$ Minimum.

Substituirt man den Werth für y aus 1, in 2, so ergibt sich

$\frac{2a}{x} + 2x^2\pi =$ Min., und also muß $d\left[\frac{a}{x} + x^2\pi\right] = 0$ seyn.

Differenziirt man wirklich, so ergibt sich

$$-\frac{a\,dx}{x^2} + 2\pi x\,dx = 0;$$ und hieraus

$2\pi x^3 = a$; also

$x = \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$; und nun

$$y = \frac{a}{x^2\pi} = \frac{a.\,2^{\frac{2}{3}}.\,\pi^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}.\,\pi} = \frac{2^{\frac{2}{3}}.\,a^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{4a}{\pi}}$$

und es verhält sich also $x : y = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} : \sqrt[3]{4}$

$= 1 \; : 2$

(Soll bei übrigens gleichen Bedingungen der Mantel und nur eine Grundfläche ein Minimum werden, so findet man $x = y = \sqrt[3]{\frac{a}{\pi}}$).

Die gesammte Außenfläche wäre also nun

$$= 2\pi\sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}\cdot\frac{4a}{\pi}} + 2\pi\sqrt[3]{\frac{a^2}{4\pi^2}}$$

$$= 2\pi\left[\sqrt[3]{\frac{2a^2}{\pi^2}} + \sqrt[3]{\frac{a^2}{4\pi^2}}\right] = 6\pi\sqrt[3]{\frac{a^2}{4\pi^2}} =$$

$3\sqrt[3]{2\pi a^2}$.

Im Beispiel der vorigen Aufgabe wäre also für $a = 500$ die kleinste begrenzende Fläche $= 3\sqrt[3]{2.\,3{,}14.\,500^2}$ $= 348{,}6$.

Aufgabe 3.

Die gesammte Außenfläche eines senkrechten Cylinders sey $= b$; wie müssen seine Abmessungen seyn, damit der Inhalt ein Maximum werde?

Auflösung.

Die beiden Gleichungen, bei derselben Bezeichnung sind hier

$$1)\ x^2 \pi y = \text{Maximum}$$

$$2)\ 2 x \pi y + 2 x^2 \pi = b.$$

Aus 2) folgt $x \pi y = \frac{b - 2 x^2 \pi}{2}$; diesen Werth in 1) gesetzt, gibt

$$\tfrac{1}{2} b x - x^3 \pi = \text{Maximum}, \text{ also}$$

$$\tfrac{1}{2} b\, d x = 3 \pi x^2 d x; \text{ folglich}$$

$$x = \sqrt{\frac{b}{6\pi}}; \text{ und daher}$$

$$y = \frac{b - \frac{1}{3} b}{2 \pi \sqrt{\frac{b}{6 \pi}}} = \sqrt{\frac{2 b}{3 \pi}}$$

so daß sich also wie in Aufgabe 2) $x : y = 1 : 2$ verhält. Der Inhalt ist dann

$$= \frac{b}{6\pi} \pi \sqrt{\frac{2 b}{3 \pi}} = \tfrac{1}{6} b \sqrt{\frac{2 b}{3 \pi}}.$$

Im Beispiel der Aufgabe 1. wäre also für $b = 350$; der möglichst größte Inhalt $= \frac{350}{6} \sqrt{\frac{2.\ 350}{3.\ 3{,}14}} =$ 502,833 .....

Anmerk. Es ist Aufgabe 3) schon in Aufgabe 2) mit aufgelöset, denn wenn für ein gegebenes a, der kleinste Werth von $b = 3 \sqrt[3]{2 \pi a^2}$ ist, so muß auch der aus dieser Formel entwickelte Werth für a, nämlich $a = \sqrt{\frac{b^3}{27.\ 2 \pi}}$ oder $a = \frac{1}{6} b \sqrt{\frac{2 b}{3 \pi}}$ für das gegebene b, ein Maximum seyn.

Aufgabe 4.

Die gesammte begrenzende Fläche eines senkrechten Kegels sey $= b$; wie müssen seine Abmessungen gewählt werden, damit sein Inhalt a ein Maximum werde?

Auflösung.

Der Halbmesser seiner Grundfläche sey $= x$; seine Höhe $= y$; so ist die Seite $= \sqrt{x^2 + y^2}$, also der Mantel $= x\pi\sqrt{x^2 + y^2}$; man hat daher folgende zwei Gleichungen:

1) $x\pi\sqrt{x^2 + y^2} + x^2\pi = b$,

2) $\frac{1}{3} x^2 \pi y =$ Max., oder $x^2 y =$ Max.

Aus 1) ergibt sich $y = \sqrt{\left(\frac{b - x^2\pi}{x\pi}\right)^2 - x^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 2b\pi x^2}{x^2\pi^2}}$.

Wird dieser Werth für y in 2) gesetzt, so entsteht

$x^2 . \sqrt{\frac{b^2 - 2b\pi x^2}{\pi^2 x^2}} =$ Maximum oder

$b x^2 - 2\pi x^4 =$ Max; also

$2 b x d x = 8 \pi x^3 d x$; daher ist

$x = \sqrt{\frac{b}{4\pi}}$, folglich

$$y = \sqrt{\frac{b^2 - 2b\pi . \frac{b}{4\pi}}{\pi^2 . \frac{b}{4\pi}}} = \sqrt{\frac{2b}{\pi}};$$

so daß sich also $x : y = 1 : 2\sqrt{2}$ verhält.

Es ist daher das größte $a = \frac{1}{3}\pi \frac{b}{4\pi}\sqrt{\frac{2b}{\pi}} = \frac{1}{12} b \sqrt{\frac{2b}{\pi}}$, wenn b gegeben ist, und das kleinste $b = \sqrt[3]{72\pi a^2}$, wenn a gegeben ist.

Ist daher a und b gegeben, und zwar, damit die Aufgabe möglich sey $a < \frac{1}{12} b \sqrt{\frac{2b}{\pi}}$ oder $b > \sqrt[3]{72 \pi a^2}$ und man soll das zugehörige x und y bestimmen, so hat man die beiden Gleichungen

1) $b = x \pi \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 \pi$,

2) $a = \frac{1}{3} x^2 \pi y$.

Aus 2) folgt $y = \frac{3a}{x^2 \pi}$. Diesen Werth in 1) gesetzt, gibt $b = \frac{x \pi \sqrt{9a^2 + x^6 \pi^2}}{x^2 \pi} + x^2 \pi$; also $(bx - x^3 \pi)^2 = 9a^2 + x^6 \pi^2$; und hieraus $x^4 - \frac{b}{2\pi} x^2 + \frac{9a^2}{2b\pi} = 0$; woraus

$$x = \sqrt{\frac{b}{4\pi} \pm \sqrt{\frac{b^2}{16\pi^2} - \frac{9a^2}{2b\pi}}}$$ folgt.

So lange in diesem Ausdruck $\frac{b^2}{16\pi^2} > \frac{9a^2}{2b\pi}$ ist, so lange entstehen auch immer zweierlei Werthe für x die desto verschiedener sind, je mehr $\frac{b^2}{16\pi^2} > \frac{9a^2}{2b\pi}$ ist. Ist $\frac{b^2}{16\pi^2} = \frac{9a^2}{2b\pi}$, so wird $x = \sqrt{\frac{b}{4\pi}}$; $a = \frac{1}{12} b \sqrt{\frac{2b}{\pi}}$; und $b = \sqrt[3]{72 \pi a^2}$; d. h., in dem Falle, in welchem x nur einen einzigen Werth erhält, wird b ein Min. oder a ein Max. Bezeichnet b bloß den Mantel des senkrechten Kegels, so wird der möglichst größte Werth für $a = \frac{1}{9} b \sqrt{\frac{2b\sqrt{3}}{\pi}}$; und also

der kleinste für $b = \sqrt[3]{\frac{81\, a^2\, \pi}{2\sqrt{3}}}$. Die Werthe für x und y, die diesen Bedingungen entsprechen, sind;

$$x = \sqrt{\frac{b\sqrt{3}}{3\,\pi}} = \sqrt[6]{\frac{9\, a^2}{2\,\pi^2}}$$

$$y = \sqrt{\frac{2\, b\sqrt{3}}{3\,\pi}} = \sqrt[6]{\frac{36\, a^2}{\pi^2}}$$

daher muß sich $x:y = 1:\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ verhalten.

Aufgabe 5.

Die Wand- und Bodenfläche eines senkrechten Kegels sey $= b$, und eine mit der Grund- oder Bodenfläche parallele, in der Entfernung h von der Spitze durch den Kegel gelegte, Ebene $= f$; wie groß ist der Halbmesser x der Grundfläche und die Höhe y?

Auflösung.

Es ist 1) $b = x\pi\sqrt{x^2 + y^2} + x^2\pi$,
und da sich jede zwei parallele Ebenen in einer Pyramide wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze verhalten, so ist

$$2)\ x^2\pi : f = y^2 : h^2.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$x = \sqrt{\frac{b}{\pi\left[1 + \sqrt{\frac{h^2\pi + f}{f}}\right]}}$$

$$y = h\sqrt{\frac{b}{f\left[1 + \sqrt{\frac{h^2\pi + f}{f}}\right]}}.$$

Aufgabe 6.

Eine Pyramide anzugeben, deren Inhalt $= a$ ist, und welche zugleich einer andern, deren Inhalt $= b$, und Höhe $= h$ ist, und welche ein reguläres Achteck zur Grundfläche hat, ähnlich seyn soll.

Auflösung.

Der Halbmesser der Grundfläche der Pyramide a sey $= x$; ihre Höhe y; so verhält sich

$$a : b = y^3 : h^3$$

also ist $y = h \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

Weil ferner der Mittelpunkts-Winkel des regulären Achtecks $= 45°$ ist; so ist die Grundfläche der Pyramide $a = 8 . \frac{1}{2} x . x \text{ Sin. } 45°$.

Es ist aber $\text{Sin. } 45° = \sqrt{\frac{1}{2}}$; daher diese Grundfläche

$= 4 x^2 \sqrt{\frac{1}{2}}$; folglich

$a = 4 x^2 \sqrt{\frac{1}{2}} . \frac{1}{3} y$, oder

$a = 4 x^2 \sqrt{\frac{1}{2}} . \frac{1}{3} h \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, und hieraus

$$x = \sqrt{\frac{3 a \sqrt{2} \sqrt[3]{b}}{4 h \sqrt[3]{a}}} \text{ oder } = \sqrt{\frac{3 \sqrt{2} . \sqrt[3]{a^2 b}}{4 h}}.$$

Aufgabe 7.

Den Inhalt einer abgekürzten Pyramide durch eine Formel darzustellen.

Auflösung.

Der Inhalt der untern Grundfläche sey $= F$; der parallelen obern $= f$; die Höhe der abgekürzten Pyramide $= h$. Man bezeichne die Höhe der Ergänzungspyramide mit x, so ist der Inhalt der ganzen Pyramide

$$= \tfrac{1}{3} F (h + x),$$

der der Ergänzungs-Pyramide $= \tfrac{1}{3} f x$,

also der der abgekürzten $= \tfrac{1}{3} F (h + x) - \tfrac{1}{3} f x$

$$= \tfrac{1}{3} [F h + (F - f) x].$$

Nun verhält sich aber wie in 5, $F : f = (h + x)^2 : x^2$; und hieraus ergibt sich $x = h \frac{f + \sqrt{Ff}}{F - f}$; folglich hat man, wenn dieser Werth für x substituirt wird, den Inhalt der abgekürzten Pyramide

$$= \tfrac{1}{3} \left[F h + (F - f) . h \frac{f + \sqrt{Ff}}{F - f}\right]$$

$$= \tfrac{1}{3} h [F + f + \sqrt{Ff}].$$

Bezeichnet man bei einem abgekürzten Kegel den Halbmesser der untern Grundfläche mit R, den der obern mit r, und setzt $R^2 \pi$ für F, und $r^2 \pi$ für f in die gefundene Formel, so erhält man den Inhalt des abgekürzten Kegels $= \tfrac{1}{3} \pi h [R^2 + r^2 + R r]$.

Aufgabe 8.

Den Mantel eines senkrechten abgekürzten Kegels durch eine Formel auszudrucken.

Auflösung.

Es bezeichne l die Seite des abgekürzten Kegels, y die des Ergänzungskegels, so ist

der Mantel des ganzen Kegels $= \pi R (l + y)$,

der des Ergänzungskegels $= \pi r y$; also der

des abgekürzten $= \pi [R l + (R - r) y]$.

Da sich aber $R : r = l + y : y$, also auch

$R - r : r = l : y$ verhält, und folglich

$(R - r) y = r l$ ist, so ergibt sich der verlangte Mantel

$$= \pi l [R + r].$$

Aufgabe 9.

Der Inhalt eines abgekürzten Kegels sey $= a$; seine Höhe $= h$; der Halbmesser x der unteren Grundfläche soll sich zu dem y der oberen wie $n : m$ verhalten; wie groß muß x und y seyn?

Auflösung.

Folgende zwei Gleichungen enthalten die Bedingungen der Aufgabe:

1) $a = \frac{1}{3} \pi h [x^2 + y^2 + x y]$

2) $x : y = n : m$.

Aus beiden ergiebt sich

$$x = n \sqrt{\frac{3 a}{\pi h [n^2 + m^2 + n m]}};$$

$$y = m \sqrt{\frac{3 a}{\pi h [n^2 + m^2 + n m]}}.$$

Aufgabe 10.

Bei einer abgekürzten Pyramide sey gegeben, die untere Grundfläche $= b$; der Inhalt $= a$; die Höhe $= h$; man soll die obere Grundfläche x bestimmen.

Auflösung.

Es soll

$$a = \tfrac{1}{3} h \, [b + x + \sqrt{bx}] \text{ seyn.}$$

Hieraus ergibt sich nach der Folge

$$3a - bh - hx = h\sqrt{bx};$$

$$(3a - bh)^2 - 2(3a - bh)\, hx + h^2 x^2 = bh^2 x;$$

$$x^2 - \frac{6a - bh}{h} + \left(\frac{3a - bh}{h}\right)^2 = 0;$$

$$x = \frac{6a - bh}{2h} \pm \sqrt{\frac{(6a - bh)^2 - 4(3a - bh)^2}{4h^2}}$$

$$= \frac{6a - bh \pm \sqrt{3bh[4a - bh]}}{2h}.$$

Setzt man in der ersten Gleichung, gleich $x = z^2$; so wird daraus $\frac{3a}{h} = b + z^2 + z.\sqrt{b}$; und hieraus folgt

$$z = -\tfrac{1}{2}\sqrt{b} \pm \sqrt{\frac{3a}{h} - \tfrac{3}{4} b};$$ also ist auch

$$x = \left[-\tfrac{1}{2}\sqrt{b} \pm \sqrt{\frac{3a}{h} - \tfrac{3}{4} b}\right]^2$$ welches, wirklich quadrirt, ganz den vorigen Ausdruck gibt.

Aufgabe 11.

Von einem abgekürzten Kegel parallel mit den Grundflächen $\frac{n}{m}$ desselben abzuschneiden.

Auflösung.

Der Halbmesser AB der obern Grundfläche sey Fig. I. $= r$; der CD der untern $= R$; die Höhe AC $= h$; EF sey die durchzulegende Ebene CG $= x$; GF $= y$; BM und FN senkrecht auf CD.

Der Inhalt von EFPD ist nach 7 $= \frac{1}{3} \pi x \, [R^2 + y^2 + Ry]$; eben so der von QBPD $= \frac{1}{3} \pi h \, [R^2 + r^2 + Rr]$; also muß

1) $\frac{1}{3} \pi x \, [R^2 + y^2 + Ry] = \frac{n}{m} \frac{1}{3} \pi h \, [R^2 + r^2 + Rr]$ seyn.

Weil ferner $\triangle$ BMD $\sim \triangle$ FND, so verhält sich

2) DN : NF = DM : MB oder

$R - y : x = -(R - r) : h.$

Aus 2) folgt $x = \frac{h}{R-r}(R-y)$; diesen Werth in 1) gesetzt, gibt

$\frac{h}{R-r}(R-y)(R^2+y^2+Ry) = \frac{n}{m} h[R^2+r^2+Rr]$

oder $R^3 - y^3 = \frac{n}{m}(R^3 - r^3)$;

daher ist $y = \sqrt[3]{R^3 - \frac{n}{m}(R^3 - r^3)}$;

folglich $x = \frac{h}{R-r}\left[R - \sqrt[3]{R^3 - \frac{n}{m}(R^3 - r^3)}\right]$.

Substituirt man aus 2) den Werth für y; $y = R - \frac{R-r}{h} x$ in 1), so erhält man eine vollständige cubische Gleichung, die bei näherer Betrachtung sich in eine reine cubische verwandeln läßt; man erhält nämlich $x^3 - 3\frac{hR}{R-r}x^2 + 3\frac{h^2R^2}{(R-r)^2}x - \frac{n}{m}h^3\frac{R^2+r^2+Rr}{(R-r)^2} = 0$.

Schafft man nämlich das letzte Glied auf die andere Seite, addirt dann beiderseits den Cubus des zweiten Theils, nämlich $\frac{-h^3 R^3}{(R-r)^3}$, so hat man links einen vollkommenen Cubus, und erhält nach Ausziehung der Cubicwurzel auf beiden Seiten

$$x - \frac{hR}{R-r} = \sqrt[3]{\frac{-h^3 R^3}{(R-r)^3} + \frac{n}{m} h^3 \frac{R^2 + r^2 + Rr}{(R-r)^2}}$$

also, wie vorhin

$$x = \frac{h}{R-r}\left[R + \sqrt[3]{-R^3 + \frac{n}{m}(R^3 - r^3)}\right]$$

$$= \frac{h}{R-r}\left[R - \sqrt[3]{R^3 - \frac{n}{m}(R^3 - r^3)}\right].$$

Aufgabe 12.

Von einer abgekürzten Pyramide parallel mit den Grundflächen $\frac{n}{m}$ derselben abzuschneiden.

Auflösung.

Die untere Grundfläche sey $= F$; die obere $= f$; beider Entfernung $= h$; die Theilebene sey $= y$; ihre Entfernung von $F = x$; die Höhe der Ergänzungspyramide $= z$; so ist nach Aufgabe 7. $z = h\frac{f + \sqrt{Ff}}{F - f}$.

Der Bedingung der Aufgabe gemäß, ist

1) $\frac{1}{3} x [F + y + \sqrt{Fy}] = \frac{n}{m} \frac{1}{3} h [F + f + \sqrt{Ff}]$;

2) $y : f = (h + z - x)^2 : z^2$; wird hierin der Werth für z substituirt, und dann x entwickelt, so ergibt sich

$$x = \frac{hF + h\sqrt{Ff} - h\,[\sqrt{F} + \sqrt{f}\,]\sqrt{y}}{F - f}$$

$$= h\,\frac{\sqrt{F}\,[\sqrt{F} + \sqrt{f}\,] - [\sqrt{F} + \sqrt{f}\,]\sqrt{y}}{F - f}$$

$$= h\,[\sqrt{F} - \sqrt{y}\,]\,\frac{\sqrt{F} + \sqrt{f}}{F - f}$$

$$= h\,\frac{\sqrt{F} - \sqrt{y}}{\sqrt{F} - \sqrt{f}}.$$ Setzt man diesen Werth in 1), schafft den Nenner weg, und multiplicirt wirklich, so entsteht

$$F\sqrt{F} - y\sqrt{y} = \frac{n}{m}\,[F\sqrt{F} - f\sqrt{f}\,];$$ und hieraus ergiebt sich

$$y = \left[F^{\frac{3}{2}} - \frac{n}{m}\,[F^{\frac{3}{2}} - f^{\frac{3}{2}}]\right]^{\frac{2}{3}};$$ also ist

$$x = \frac{h}{F^{\frac{1}{2}} - f^{\frac{1}{2}}}\left[F^{\frac{1}{2}} - \left[F^{\frac{3}{2}} - \frac{n}{m}\,[F^{\frac{3}{2}} - f^{\frac{3}{2}}]\right]^{\frac{1}{3}}\right].$$

Aufgabe 13.

In einem senkrechten Kegel denjenigen senkrechten Cylinder aufzusuchen, dessen Inhalt ein Maximum ist.

Auflösung.

Fig. 2. Es sey Fig. 2. $AD = h$; $DC = r$; $DF = x$; $DN = y$; so sind die beiden Gleichungen

1) $x^2 \pi y = \text{Maximum}$,

2) $h - y : x = h : r$.

Beide geben $(h - y)^2 . y = \text{Maximum}$,

und hieraus folgt $y = \frac{1}{3}\,h$;

also ist $x = \frac{2}{3}\,r$;

dann ist der Cylinder also $= \frac{4}{9}$ des Kegels.

Soll der Mantel ein Maximum seyn, so hat man die beiden Gleichungen

$$1)\ 2x\pi y = \text{Maximum},$$

$$2)\ h - y : x = h : r$$

und hieraus ergibt sich

$$x = \tfrac{1}{2} r;$$

$$y = \tfrac{1}{2} h.$$

Soll der gesammte Umfang des Cylinders ein Maximum werden, so hat man

$$1)\ 2x\pi y + 2x^2\pi = \text{Maximum}$$

$$2)\ h - y : x = h : r;$$

woraus $y = \frac{1}{2} h \frac{h - 2r}{h - r}$ und

$x = \frac{1}{2} h \frac{r}{h - r}$ folgt.

Aufgabe 14.

Im senkrechten abgekürzten Kegel den Cylinder vom größten Inhalt, den vom größten Mantel und den von der größten gesammten Außenfläche zu bestimmen.

Auflösung.

Es sey Fig. 1; $AB = r$; $CD = R$; $AC = h$; EWNF sey der gesuchte Cylinder $CN = x$; $CG = y$. Fig. 1.

Im ersten Falle hat man die beiden Gleichungen

$$1)\ x^2 y = \text{Maximum}$$

$$2)\ h : R - r = y : R - x.$$

Beide geben $x = \frac{2}{3} R$; (wie Aufg. 13.) und $y = \frac{hR}{3(R - r)}$.

Es findet also, wie auch aus Aufg. 13. erhellet, nur dann ein Maximum Statt, wenn $r < \frac{2}{3} R$ ist.

Im zweiten Falle hat man

$$1)\ x\,y = \text{Maximum}$$

$$2)\ h : R - r = y : R - x,$$

woraus $x = \frac{1}{2} R$

$$y = \frac{h\,R}{2\,(R - r)}$$ folgt.

Im dritten Falle erhält man

$$x = \frac{h\,R}{2\,(h + r - R)}$$

$$y = \frac{h\,R}{R - r} \cdot \frac{h + 2r - 2R}{2h + 2r - 2R}.$$

Aufgabe 15.

Der Inhalt eines senkrechten abgekürzten Kegels soll $= K$; seine Höhe $= h$ seyn; wie müssen seine Abmessungen genommen werden, damit der möglichst größte Cylinder in denselben beschrieben werden kann?

Auflösung.

Die Bezeichnung sey wie in der vorigen Aufgabe, außer daß $CD = z$; $AB = u$ sey; so muß nach der vorigen Auflösung

$$x = \tfrac{2}{3} z;\ y = \frac{h\,z}{3\,(z - u)}$$ seyn;

also ist der Inhalt des Cylinders

$$= x^2 \pi y = \tfrac{4}{27} \pi h \frac{z^3}{z - u}.$$

Man

Man hat also die beiden Gleichungen

1) $\frac{z^3}{z - u} = \text{Maximum},$

2) $K = \frac{1}{3} \pi h \, [z^2 + z u + u^2].$

Aus 2) ergiebt sich $u = -\frac{1}{2} z + \sqrt{\frac{3K}{\pi h} - \frac{3}{4} z^2}.$

Setzt man diesen Werth in 1), so entsteht

$\frac{z^3}{\frac{3}{2} z - \sqrt{\frac{3K}{\pi h} - \frac{3}{4} z^2}} = \text{Maximum.};$ und nun nach der Folge

$$\left[\tfrac{3}{2} z - \sqrt{\tfrac{3K}{\pi h} - \tfrac{3}{4} z^2}\right] 3 z^2 =$$

$$z^3 \left[\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} \left(\tfrac{3K}{\pi h} - \tfrac{3}{4} z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \tfrac{3}{2} z\right];$$

$$3 z - 3 \sqrt{\frac{3K}{\pi h} - \frac{3}{4} z^2} = \frac{3 z^2}{4 \sqrt{\frac{3K}{\pi h} - \frac{3}{4} z^2}};$$

$$4 z \sqrt{\frac{3K}{\pi h} - \frac{3}{4} z^2} = z^2 + \frac{12K}{\pi h} - 3 z^2$$

$$16 z^2 \left[\frac{3K}{\pi h} - \frac{3}{4} z^2\right] = \frac{144 K^2}{\pi^2 h^2} - \frac{48 K z^2}{\pi h} + 4 z^4$$

$$z^4 - \frac{6K}{\pi h} z^2 + \frac{9 K^2}{\pi^2 h^2} = 0$$

$z = \sqrt{\frac{3K}{\pi h} \pm \sqrt{\frac{9 K^2}{\pi^2 h^2} - \frac{9 K^2}{\pi^2 h^2}}}$ oder

$z = \sqrt{\frac{3K}{\pi h}}$; hieraus ist $\frac{1}{3} \pi h z^2 = K$; das heißt: in dem vollständigen Kegel läßt sich immer ein größerer Cylinder beschreiben, als in dem gleichhohen und gleichen abgekürzten.

Aufgabe 16.

Der Inhalt eines senkrechten abgekürzten Kegels sey $= Q$; seine Höhe $= h$; wie müssen seine Abmessungen gewählt werden, damit die begrenzende Fläche ein Minimum werde

Auflösung.

Der Winkel, den der Mantel mit der Grundfläche macht, sey $= z$; der Halbmesser der obern Grundfläche $= y$; der der untern $= x$; so ist

$$x = y + h \operatorname{Cotg} z.$$

Nun ist aber $Q = \frac{1}{3} \pi h [x^2 + y^2 + xy]$; oder, wenn man den Werth für x substituirt,

$$Q = \frac{1}{3} \pi h [3 y^2 + 3 hy \operatorname{Cotg} z + h^2 \operatorname{Cotg} z^2],$$

Aus dieser Gleichung ist

$$y = -\frac{1}{2} h \operatorname{Cotg} z + \sqrt{\frac{Q}{\pi h} - \frac{1}{12} h^2 \operatorname{Cotg} z^2},$$

also $x = \frac{1}{2} h \operatorname{Cotg} z + \sqrt{\frac{Q}{\pi h} - \frac{1}{12} h^2 \operatorname{Cotg} z^2}$;

folglich die untere Grundfläche, oder

$$x^2 \pi = \pi \left[\frac{1}{6} h^2 \operatorname{Cotg} z^2 + \frac{Q}{\pi h} + h \operatorname{Cotg} z \sqrt{\frac{Q}{\pi h} - \frac{1}{12} h^2 \operatorname{Cotg} z^2}\right]$$

und die obere, oder

$$y^2 \pi = \pi \left[\frac{1}{6} h^2 \operatorname{Cotg} z^2 + \frac{Q}{\pi h} - h \operatorname{Cotg} z \sqrt{\frac{Q}{\pi h} - \frac{1}{12} h^2 \operatorname{Cotg} z^2}\right];$$

folglich die Summe beider

$$= \pi \left[\tfrac{1}{3} h^2 \text{ Cotg } z^2 + \frac{2Q}{\pi h}\right].$$

Der Mantel ist, nach Aufgabe 8

$$= \pi [x + y] \sqrt{h^2 + (x - y)^2}$$

oder nach Substitution der Werthe für x und y;

$$= 2\pi \sqrt{\frac{Q}{\pi h} - \tfrac{1}{12} h^2 \text{ Cotg } z^2} \cdot \sqrt{h^2 + h^2 \text{ Cotg } z^2}$$

$$= 2 h \pi \text{ Cosec } z \sqrt{\frac{Q}{\pi h} - \tfrac{1}{12} h^2 \text{ Cotg } z^2}.$$

Die gesammte begrenzende Fläche ist daher

$$= \pi \left[\frac{2Q}{\pi h} + \tfrac{1}{3} h^2 \text{ Cotg } z^2 + 2 h \text{ Cosec } z \sqrt{\frac{Q}{\pi h} - \tfrac{1}{12} h^2 \text{ Cotg } z^2}\right].$$

Der Aufgabe gemäß muß also dieser Ausdruck oder

$$\tfrac{1}{3} h \text{ Cotg } z^2 + 2 \text{ Cosec } z \sqrt{\frac{Q}{\pi h} - \tfrac{1}{12} h^2 \text{ Cotg } z^2}$$

= Minimum werden.

Weil nun $d \text{ Cotg } z = - \text{Cosec } z^2 dz$

und $d \text{ Cosec } z = - \text{Cotg } z . \text{ Cosec } z \, d z$ ist,

so erhält man, wenn man wirklich differenziirt, nach der Folge

$$- \tfrac{1}{3} h \text{ Cotg } z \text{ Cosec } z^2 - \sqrt{\frac{Q}{\pi h} - \tfrac{1}{12} h^2 \text{ Cotg } z^2} \text{ Cotg } z \text{ Cosec } z$$

$$+ \text{Cosec } z \frac{\tfrac{1}{12} h^2 \, 2 \text{ Cotg } z \text{ Cosec } z^2}{2\sqrt{\frac{Q}{\pi h} - \tfrac{1}{12} h^2 \text{ Cotg } z^2}} = 0;$$

$$-\frac{1}{3}h\,\text{Cosec}\,z + \frac{h^2\,\text{Cosec}\,z^2}{12\sqrt{\frac{Q}{\pi h} - \frac{1}{12}h^2\,\text{Cotg}\,z^2}} = \sqrt{\frac{Q}{\pi h} - \frac{1}{12}h^2\,\text{Cotg}\,z^2}.$$

Schafft man nun den Nenner weg, quadrirt dann, nachdem man die Wurzelgröße allein gestellt, schreibt $1 + \text{Cotg}\,z^2$ für $\text{Cosec}\,z^2$ und ordnet die Gleichung, so entsteht

$$\text{Cotg}\,z^4 + \frac{\pi h^3 - 12Qh}{\pi h^3}\,\text{Cotg}\,z^2 - \frac{120\pi h^3 Q - 432Q^2 - 3\pi^2 h^6}{16\,\pi^2\,h^6} = 0$$

woraus man

$$\text{Cotg}\,z = \sqrt{\frac{24\,Q - 2\pi h^3 \pm (12\,Q + \pi h^3)}{4\,\pi h^3}}$$ erhält.

Einige Proben zeigen, daß + genommen werden muß, dann ist also

$$\text{Cotg}\,z = \sqrt{\frac{36\,Q - \pi h^3}{4\,\pi h^3}},$$

folglich

$$x = \frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{4Q}{\pi h} + \frac{1}{3}h^2} + \sqrt{\frac{36\,Q}{\pi h} - h^2}\right],$$ und

$$y = \frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{4Q}{\pi h} + \frac{1}{3}h^2} - \sqrt{\frac{36\,Q}{\pi h} - h^2}\right].$$

Es muß also, damit x und y nicht unmöglich werde,

$$\frac{36\,Q}{\pi\,h} > h^2;$$ oder

$$h < \sqrt[3]{\frac{36\,Q}{\pi}},$$

und, damit y nicht negativ werde,

$\frac{4\,Q}{\pi\,h} + \frac{1}{3}\,h^2 > \frac{36\,Q}{\pi\,h} - h^2$; oder

$$h > \sqrt[3]{\frac{24\,Q}{\pi}} \text{ seyn.}$$

Die Aufgabe ist also nur dann möglich, wenn h zwischen $\sqrt[3]{\frac{24\,Q}{\pi}}$ und $\sqrt[3]{\frac{36\,Q}{\pi}}$ fällt.

Ist $h = \sqrt[3]{\frac{36\,Q}{\pi}}$; so wird $x = y$, also in diesem Falle der abgekürzte Kegel ein Cylinder.

Ist aber $h = \sqrt[3]{\frac{24\,Q}{\pi}}$; so wird $y = 0$; also in diesem Falle der abgekürzte Kegel ein vollständiger.

Ist $Q = 314$; und $h = 15$; also zwischen $\sqrt[3]{2400}$ und $\sqrt[3]{3600}$; so wird $y = 1{,}5525$;
$x = 3{,}48895$;
und die Fläche $= 284{,}6$.

Nimmt man $y = 2$; so erhält man $x = 3{,}1249$ und die Fläche $= 285{,}263$.

Nimmt man $y = 1$; so wird $x = 3{,}8875$, und die Fläche $= 285{,}014$.

In beiden Fällen findet man x aus der Gleichung $Q = \frac{1}{3}\,\pi\,h\,[x^2 + y^2 + x\,y]$.

Aufgabe 17.

Der Inhalt eines senkrechten abgekürzten Kegels soll $= Q$ seyn; wie müssen seine Abmessungen gewählt werden, damit die gesammte begrenzende Fläche ein Minimum werde?

Auflösung.

Die Bezeichnung sey wie oben, außer die Höhe $= w$; so muß nach 16

$$y = \frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{4Q}{\pi w} + \frac{1}{3}w^2} - \sqrt{\frac{36Q}{\pi w} - w^2}\right]$$

$$x = \frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{4Q}{\pi w} + \frac{1}{3}w^2} + \sqrt{\frac{36Q}{\pi w} - w^2}\right]$$ seyn;

dann ist die Seite dieses abgekürzten Kegels

$$= \sqrt{w^2 + (x - y)^2} = \sqrt{w^2 + \frac{9Q}{\pi w} - \frac{1}{4}w^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9Q}{\pi w} + \frac{3}{4}w^2},$$

folglich der Mantel $= \frac{1}{4}\pi\left[\frac{12Q}{\pi w} + w^2\right]$ nach der Formel in 8, und die Summe beider Grundflächen $=$ $(x^2 + y^2)\pi$

$$= \frac{1}{16}\pi\left[\frac{80Q}{\pi w} - \frac{4}{3}w^2\right],$$

folglich muß $\frac{32Q}{\pi w} + \frac{2}{3}w^2$ ein Minimum werden.

Dieß ist der Fall, wenn $w = \sqrt[3]{\frac{24Q}{\pi}}$, also $y = 0$; und $x = \sqrt[6]{\frac{9Q^2}{8\pi^2}}$ wird.

Bei gleichem Inhalt bedarf also der ganze Kegel immer weniger Fläche als der abgekürzte.

Anmerk. Setzt man also den Inhalt eines senkrechten Kegels $= Q$, so erhält man, wenn er die möglichst kleinste Wand- und Bodenfläche haben soll, den Halbmesser seiner Grundfläche

$$= \sqrt[6]{\frac{9Q^2}{8\pi^2}};$$

und hieraus die Seite desselben

$$= 3 \sqrt{\frac{9 Q^2}{8 \pi^2}}.$$

Diese muß also drei Mahl so groß als der Halbmesser der Grundfläche seyn.

Aufgabe 18.

Im senkrechten Kegel den auf seiner Spitze stehenden Kegel zu bestimmen, dessen Mantel ein Maximum ist.

Auflösung.

Es sey $AD = h$; $DC = r$; GKD der verlangte Kegel; $DN = y$; $NK = x$; so muß Fig. 2.

1) $x \sqrt{x^2 + y^2} =$ Maximum,

2) $h - y : x = h : r$ seyn.

Man findet $x = \frac{1}{4} h \frac{r [3 h \pm \sqrt{h^2 - 8 r^2}]}{r^2 + h^2}$;

$$y = \frac{1}{4} h \frac{4 r^2 + h^2 \mp h \sqrt{h^2 - 8 r^2}}{r^2 + h^2}.$$

Es findet also nur dann ein Maximum Statt, wenn $h >$ oder $= r \sqrt{8}$ ist. Ist $h = r \sqrt{8}$; so wird $x = \frac{2}{3} r$; $y = \frac{1}{3} h$; h ist in diesem Falle, wenn Q den Inhalt des Kegels bezeichnet, $= \sqrt[3]{\frac{24 Q}{\pi}}$ wie 16, 17.

Aufgabe 19.

Der Inhalt eines senkrechten Kegels sey $= Q$.; wie müssen seine Abmessungen genommen werden, damit die in demselben zu beschreibende Kugel ein Maximum werde? Fig. 3.

Auflösung.

Es sey AC = y; AB = x; der Halbmesser der Kugel AD = DE = z, so soll z ein Maximum werden. Man hat

1) $\frac{1}{3} x^2 \pi y = Q$,

2) CD : DE = CB : AB oder

$y - z : z = \sqrt{x^2 + y^2} : x$; und hieraus

$z = \frac{x y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$; oder wenn aus 1) für y substituirt wird

$$z = \frac{3 Q}{\pi \left[x^2 + \sqrt{x^4 + \frac{9 Q^2}{\pi^2 x^2}}\right]};$$

daher $x^2 + \sqrt{x^4 + \frac{9 Q^2}{\pi^2 x^2}}$ = Minimum.

Hieraus ergiebt sich $x = \sqrt[6]{\frac{9 Q^2}{8 \pi^2}}$ und $y = \sqrt[3]{\frac{24 Q}{\pi}}$.

In demjenigen Kegel vom Inhalt Q, in welchem die Wand- und Bodenfläche ein Minimum ist, ist also die Kugel ein Maximum (S. Aufgabe 17.)

Soll der Mantel eines senkrechten Kegels = m, und die Kugel in demselben ein Maximum seyn, so hat man

1) $m = \pi x \sqrt{x^2 + y^2}$,

2) $z = \frac{x y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$.

Aus 1) für y sein Werth $\sqrt{\frac{m^2}{\pi^2 x^2} - x^2}$

in 2) gesetzt, gibt

$$z = \frac{x\sqrt{m^2 - \pi^2 x^4}}{m + \pi x^2}$$

$$= \frac{x\sqrt{(m + \pi x^2)(m - \pi x^2)}}{m + \pi x^2},$$

$$= \sqrt{\frac{m x^2 - \pi x^4}{m + \pi x^2}},$$

und $\frac{m x^2 - \pi x^4}{m + \pi x^2}$ wird ein Maximum,

wenn $x = \sqrt{\frac{m}{\pi}[-1 + \sqrt{2}]}$; $y = \sqrt{\frac{2m}{\pi}}$ ist.

Versteht man unter m die gesammte begrenzende Fläche des Kegels, so erhält man bei derselben Forderung

$$x = \sqrt{\frac{m}{4\pi}};\ y = \sqrt{\frac{2m}{\pi}},$$

also $Q = \frac{1}{3}\,\frac{m}{4\pi}\,\pi\sqrt{\frac{2m}{\pi}}$; woraus $m = \sqrt[3]{72\,Q^2\,\pi}$;

also $x = \sqrt[6]{\frac{9\,Q^2}{8\,\pi^2}}$ und $y = \sqrt[6]{\frac{576\,Q^2}{\pi^2}}$ folgt.

Anmerk. Mancherlei interessante Vergleichungen und Untersuchungen lassen sich hiernach noch anstellen. Will man z. B. wissen, der wievielste Theil des Kegels vom Inhalt Q gleich der darinn beschriebenen Kugel ist, wenn man nämlich die Abmessungen des Kegels so bestimmt hat, daß die möglichst größte Kugel entstand, so hat man $z = \frac{3\,Q}{\pi\left[x^2 + \sqrt{x^4 + \frac{9\,Q^2}{\pi^2\,x^2}}\right]}$; substituirt man hierin $\sqrt[6]{\frac{9\,Q^2}{8\,\pi^2}}$ für x, so ergiebt sich nach gehöriger Umformung

$z = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{3Q}{\pi}}$. Daher ist die Kugel
$= \frac{4}{3} z^3 \pi = \frac{4}{3} \pi \frac{1}{8} \frac{3Q}{\pi} = \frac{1}{2} Q$.

Setzt man ferner $\sqrt[3]{\frac{24Q}{\pi}}$ für die Höhe, und $\sqrt[6]{\frac{9Q^2}{8\pi^2}}$ für x, so erhält man aus $x^2 \pi + x \pi \sqrt{x^2+y^2}$ die gesammte begrenzende Fläche $= 2\pi \sqrt[3]{\frac{9Q^2}{\pi^2}}$.

Die Kugelfläche ist $= 4 z^2 \pi = \pi \sqrt[3]{\frac{9Q^2}{\pi^2}}$, also halb so groß.

Daher ist zugleich für $x = \sqrt[6]{\frac{9Q^2}{8\pi^2}}$ und $y = \sqrt[3]{\frac{24Q}{\pi}}$

1) die begrenzende Fläche des Kegels ein Minimum

2) die darin beschriebene Kugel die möglichst größte in allen Kegeln vom Inhalte Q;

3) der Kegel doppelt so groß wie die Kugel, und

4) seine begrenzende Fläche doppelt so groß als die Kugelfläche.

Aufgabe 20.

In einer Kugel 1) den Cylinder vom größten Inhalt; 2) den vom größten Mantel; 3) den von der größten gesammten begrenzenden Fläche anzugeben.

Auflösung.

Es sey der Halbmesser AC (Fig. 4.) $= r$; AB $= y$; BC $= x$, so hat man im ersten Falle die beiden Gleichungen: Fig. 4.

1) $x^2 y =$ Maximum,

2) $r^2 = x^2 + y^2$.

Beide geben $y = r\sqrt{\frac{1}{3}}$; $x = r\sqrt{\frac{2}{3}}$, und es verhält sich also dieser Cylinder zur Kugel $= 1 : \sqrt{3}$.

Im zweiten Falle hat man

1) $xy =$ Maximum,

2) $r^2 = x^2 + y^2$; und hieraus folgt $x = r\sqrt{\frac{1}{2}}$, und $y = r\sqrt{\frac{1}{2}}$; d. h., der Achsenquerschnitt des Cylinders muß ein Quadrat seyn, dann ist der Mantel halb so groß als die Kugelfläche.

Im dritten Falle ist

1) $2xy + x^2 =$ Maximum,

2) $r^2 = x^2 + y^2$; und hier ergibt sich

$$x = r\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{\tfrac{1}{5}})};\ y = r\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 \mp \sqrt{\tfrac{1}{5}})};$$

wo die obern Zeichen gelten müssen.

Aufgabe 21.

In der Kugel 1) den Kegel vom größten Inhalt; 2) den vom größten Mantel; 3) den von der größten begrenzenden Fläche zu bestimmen.

Auflösung.

Es sey DE (Fig. 4.) $= y$; EF $= x$, so hat man im ersten Falle Fig. 4.

1) $x^2 y = \text{Maximum}$,

2) $x^2 = 2ry - y^2$;

hieraus folgt $y = \frac{4}{3} r$; $x = r\sqrt{\frac{8}{9}}$;

dann ist der Kegel $= \frac{1}{3} . \frac{8}{9} r^2 \pi \frac{4}{3} r = \frac{8}{27}$ der Kugel.

Im zweiten Falle findet man ebenfalls $y = \frac{4}{3} r$; $x = r\sqrt{\frac{8}{9}}$, also treffen beide Fälle zusammen.

Im dritten wird $y = \frac{23 - \sqrt{17}}{16} r$

$$x = r\sqrt{\frac{95 + 7\sqrt{17}}{128}}.$$

Aufgabe 22.

In einem senkrechten Kegel die größte Parabel zu bestimmen.

Auflösung.

Fig. 5. Es sey (Fig. 5) $DC = h$; $CB = r$; $AB = x$; so ist

$AF = \sqrt{2rx - x^2}$; und aus der Proportion

$x : AE = 2r : \sqrt{r^2 + h}$ ist

$AE = \frac{x\sqrt{r^2 + h^2}}{2r}$; daher die Parabel

$= \frac{4}{3} \frac{x\sqrt{r^2 + h^2}}{2r} \sqrt{2rx - x^2}$. Es muß also

$x\sqrt{2rx - x^2}$ ein Maximum werden, und dieß ist der Fall, wenn $x = \frac{3}{2} r$ ist.

Dann ist die Parabel $= \frac{1}{2} r \sqrt{3 (r^2 + h^2)}$.

Aufgabe 23.

Den Cubic-Inhalt eines Kummkarrens anzugeben.

Auflösung.

Es sey (Fig. 6) das Rechteck MNPQ die Bodenfläche, und das CEDF die parallele obere offene Seite; DF = CE = B; CD = EF = A; NP = MQ = a; NM = PQ = b; das Perpendikel zwischen CEDF und MNPQ = h; durch die in der Figur angezeigten Hülfslinien wird der ganze Körper in neun einzelne Körper, nämlich in ein vierseitiges, und in vier dreiseitige Prismen, und in vier vierseitige Pyramiden zerlegt. Bezeichnet man nun die Ausladungen der vier Seitenwände mit α, β, γ, δ, wie in der Figur angezeigt ist, so hat man Fig. 6.

das vierseitige Prisma = abh,

die vier dreiseitigen = $\frac{1}{2}\alpha a h + \frac{1}{2}\beta a h + \frac{1}{2}\gamma b h + \frac{1}{2}\delta b h$,

die vier vierseitigen Pyramiden = $\frac{1}{3}\alpha\gamma h + \frac{1}{3}\beta\gamma h + \frac{1}{3}\beta\delta h + \frac{1}{3}\alpha\delta h$.

Die Summe gibt den ganzen Körper, und ist

$= \frac{1}{6} h [6ab + 3\alpha a + 3\beta a + 3\gamma b + 3\delta b + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + 2\beta\delta + 2\alpha\delta]$

$= \frac{1}{6} h [2AB + 4ab + \alpha a + \beta a + \gamma b + \delta b]$

$= \frac{1}{6} h [2AB + 2ab + a[b + \alpha + \beta] + b(a + \gamma + \delta)]$

$= \frac{1}{6} h [2AB + 2ab + aB + bA]$.

Aus welcher Formel die, Aufgabe 7, wird, wenn man $A:B = a:b$ setzt.

Ist die Form noch irregulärer, wie Fig. 7, nämlich CE = A; DF = B; NM = a; PQ = b; CD Fig. 7.

$= EF = L$; $NP = MQ = l$, und die Höhe wieder $= h$; aber, wie in Fig. 6, $CE \not\parallel DF$; und $NM \not\parallel PQ$; auch $< PNM = < QMN$; $< DCE = < FEC$; in welchem Falle nämlich $DC = FE$ und $NP = MQ$ ist; so lege man mit DCEF und PNMQ in der unbestimmten Höhe $QT = x$ die Ebene VWZK durch den Körper, so ist der unter dieser Ebene liegende Theil, der K heißen soll

$$= \int (\text{Ebene VWZK})\, dx.$$

Nun verhält sich aber $x : h = NR : NG = RV : GC$,

also ist $RV = \frac{x}{h} GC$.

Eben so verhält sich $x : h = MI : MH = IW : HE$,

also ist $IW = \frac{x}{h} HE$.

Daher $RV + IW = \frac{x}{h} [GC + HE] = \frac{x}{h} [A - a]$ folglich $VW = a + \frac{x}{h} [A - a]$.

Eben so ergibt sich $KZ = b + \frac{x}{h} [B - b]$.

Nun ist das Perpendikel zwischen CE und DF $= \sqrt{L^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2}$, welches P heißen soll; und das zwischen PQ und NM $= \sqrt{l^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$, welches p heißen soll.

Es gibt daher das vierte Glied der Proportion

$$h : x = P - p : \frac{P-p}{h} x$$

und p; also $p + \frac{P-p}{h} x$ das Perpendikel zwischen KZ und VW. Also ist

$$\text{Ebene VWZK} = \frac{a + \frac{x}{h}(A-a) + b + \frac{x}{h}(B-b)}{2}$$

$$[p + \frac{x}{h}(P-p)] = \frac{1}{2h^2}[(a+b)h^2 p + h[(a+b)[P-2p] + (A+B)p]x + [A+B-a-b][P-p]x^2],$$

daher

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{2h^2}[(a+b)h^2 p x + h[(a+b)[P-2p] + [A+B]p]\tfrac{1}{2}x^2 + [A+B-a-b](P-p)\tfrac{1}{3}x^3].$$

Setzt man hierin h für x, so erhält man den verlangten Körper nach kurzer Umformung =

$$\tfrac{1}{12}h[2(A+B)P + 2(a+b)p + (a+b)P + (A+B)p],$$

oder auch =

$$\tfrac{1}{12}h[[A+B][2P+p] + (a+b)[2p+P]].$$

Weit leichter ist die Bestimmung des Cubic-Inhalts eines Deiches (Dammes) oder auch Erdauswurfs bei einem Graben. Denn ist Fig. 8 ein solcher Deich; Fig. 8. seine Kronenbreite AB = CD = b; die Höhe AE = BG = h; die CL = DN = H; die Dossirung rechts n-, links m-füßig, also GI = nh; NM = nH; EF = mh; LK = mH, und das Perpendikel zwischen den lothrechten Ebenen FABI, KCDN = L, so theilen die lothrechten Ebenen, ACLE, BDNG, den Körper in das Prismen zwischen diesen Ebenen, und in eine abgekürzte Pyramide auf jeder Seite.

Das Prismen ist $= BDNG. AB = \frac{H+h}{2} L. b.$

Die abgekürzte Pyramide rechts, nach Aufgabe 7,

$= \frac{1}{3} L [\frac{1}{2} mH + \frac{1}{2} m h^2 + \sqrt{\frac{1}{4} m^2 H^2 h^2}]$

$= \frac{1}{6} m L [H^2 + h^2 + Hh].$

Eben so die links $= \frac{1}{6} n L [H^2 + h^2 + Hh].$

Daher der ganze Körper gleich der Summe,

$= \frac{1}{6} L [3 b (H+h) + (m+n) (H^2 + h^2 + Hh]].$

Ist $H = h$, so wird der ganze Körper ein Prismen

$= \frac{1}{2} LH [2b + (m+n) H].$

Aufgabe 24.

Den Cubic-Inhalt der Gewölbsteine bey Brückenbogen, welche aus mehreren Kreisbogen zusammen gesetzt sind, zu bestimmen.

a) Es sey gegeben die Weite im Lichten MG (Fig. 9) = 2 b; die Höhe im Lichten AD = h; ferner soll der ganze Bogen aus drei Kreisbogen, MN, CG und NC, so zusammen gesetzt werden, daß MN und CG congruent sind, senkrecht von MG aufsteigen, und mit dem mittleren Bogen NC, der einem Winkel 2 α zugehören soll, stetig zusammen laufen. Diesen Bedingungen gemäß, müssen die Mittelpunkte zu MN und CG in MG liegen; sie sollen K und F seyn; ferner muß der Mittelpunkt zu NC so wohl mit NK als mit CF in einer geraden Linie, also in T liegen.

Fig. 9.

Man

Man setze den Halbmesser der beiden Seitenbogen $= y$; den des mittleren $= x$; so ist

$$DF + FG = DG, \text{ oder}$$

$$1)\ (x - y)\ \mathrm{Sin}\,\alpha + y = b; \text{ und}$$

$$DT + AD = AT, \text{ oder}$$

$$2)\ (x - y)\ \mathrm{Cos}\,\alpha + h = x.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$y = \frac{h\ \mathrm{Sin}\,\alpha - b\ \mathrm{Sin\,v}\,\alpha}{\mathrm{Sin}\,\alpha - \mathrm{Sin\,v}\,\alpha}$$

$$= \frac{h\ \mathrm{Sin}\,\alpha - 2\,b\ \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha^2}{\mathrm{Sin}\,\alpha - 2\ \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,a^2},$$

oder, wenn Zähler und Nenner mit $\mathrm{Sin.}\,\alpha = 2\ \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha\ \mathrm{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha$ dividirt wird,

$$y = \frac{h - b\ \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha}; \text{ folglich ist}$$

$$x = \frac{b - y + y\ \mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Sin}\,\alpha}, \text{ oder, wenn man}$$

für y den Werth setzt;

$$x = \frac{b\ [1 - 2\ \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha^2] - h\ [1 - \mathrm{Sin}\,\alpha]}{\mathrm{Sin}\,\alpha - 2\ \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha^2} =$$

$$\frac{b\ \mathrm{Cos}\,\alpha - h\ [1 - \mathrm{Sin}\,\alpha]}{1 - 2\ \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha^2 - [1 - \mathrm{Sin}\,a]}$$

$$= \frac{b - h\,\dfrac{1 - \mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\alpha}}{1 - \dfrac{1 - \mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\alpha}};$$

Es ist aber $\frac{1 - \mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\alpha} = \frac{1 - 2\ \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha\ \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha^2 - \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha^2} =$

$$\frac{(\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha - \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha)^2}{(\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha - \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha)\ (\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha + \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha)}$$

$$= \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\alpha - \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\alpha + \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\operatorname{Sin}45\ \operatorname{Cos}\frac{1}{2}\alpha - \operatorname{Cos}45\ \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{Cos}45\ \operatorname{Cos}\frac{1}{2}\alpha + \operatorname{Sin}45\ \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\operatorname{Sin}(45 - \frac{1}{2}\alpha)}{\operatorname{Cos}(45 - \frac{1}{2}\alpha)}$$

$$= \operatorname{Tg}(45 - \tfrac{1}{2}\alpha);$$ daher

$$x = \frac{b - h \operatorname{tg}(45 - \frac{1}{2}\alpha)}{1 - \operatorname{tg}(45 - \frac{1}{2}\alpha)}.$$

Die Bestimmung des Cubic-Inhalts der Gewölbsteine ergibt sich nun, da die Halbmesser und die Mittelpunkts-Winkel bekannt sind, wenn die Höhe der Gewölbsteine gegeben ist, von selbst.

Ist nicht der Winkel gegeben, sondern etwa das Verhältniß von DF:DT = 3:4 gegeben, so findet man

$$x = 2b - h$$

$$y = \frac{3h - b}{2}.$$

b) Die Halbmesser sind durch folgende Construction bestimmt.

Fig. 10. Man verzeichne mit der halben Weite BE = b, und der Höhe BC = h ein Rechteck BCDE, ziehe die Diogonale CE, und halbire die Winkel ECD = γ und CED = α, durch die Linien CF, EG; fälle dann aus dem Durchschneidungspunkt K ein Perpendikel KN auf CE, und verlängere dieses, so gibt T den Mittelpunkt zum Bogen KE und A den, zum Bogen CK.

Der geometrische Beweis der Richtigkeit ist ganz einfach. Zur Bestimmung der Halbmesser CA = AK

$= x$ und $TK = TE = y$, setze man die Diagonale $EC = \sqrt{b^2 + h^2} = d$; so ist

$$\mathrm{Sin}\ \alpha = \mathrm{Cos}\ \gamma = \frac{b}{d};$$

$$\mathrm{Sin}\ \gamma = \mathrm{Cos}\ \alpha = \frac{h}{d};\ \text{folglich}$$

$$\mathrm{Cos}\ CEG = \mathrm{Cos}\ \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 + \mathrm{Cos}\ \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{d+h}{2\,d}}$$

$$\mathrm{Sin}\ CEG = \mathrm{Sin}\ \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \mathrm{Cos}\ \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{d-h}{2\,d}}$$

$$\mathrm{Cos}\ ECF = \mathrm{Cos}\ \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{d+b}{2\,d}},\ \text{und}$$

$$\mathrm{Sin}\ \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{d-b}{2\,d}}.$$

Nun verhält sich aber $CE : CK = \mathrm{Sin}\ CKE : \mathrm{Sin}\ CEK$, oder $d : CK = \mathrm{Sin}\ 45 : \mathrm{Sin}\ \tfrac{1}{2}\alpha$;

und hieraus ist $CK = \dfrac{d\ \mathrm{Sin}\ \tfrac{1}{2}\alpha}{\sqrt{\tfrac{1}{2}}} = \sqrt{d\,(d-h)}$

folglich $x = \dfrac{\tfrac{1}{2}CK}{\mathrm{Cos}\ ACK} = \dfrac{CK}{2\ \mathrm{Sin}\ \tfrac{1}{2}\gamma}$,

oder nach Substitution der Werthe

$$x = d\sqrt{\frac{d-h}{2\,(d-b)}}.$$

Eben so ergibt sich $y = d\sqrt{\dfrac{d-b}{2\,(d-h)}}$.

c) Der Bogen soll mehr oder weniger gegen D gekrümmt seyn.

Man nehme im ersten Fall DE Fig. 11. kleiner; Fig. 11.
im zweiten größer als DF in der Fig. 10. an, mache DB = DG, trage den Winkel DAE $= \alpha$ in BGC,

und errichte auf die Mitte von AF in K ein Perpendikel, so gibt T den Mittelpunkt zu AF und, wenn FT gezogen wird, I den Mittelpunkt zum Bogen FG. Man setze $AT = TF = x$; $FI = IG = y$; $AM = DG = h$; $AD = MG = b$; die Diagonalen $AG = \sqrt{b^2 + h^2} = d$; $DE = n$; und $AE = \sqrt{b^2 + n^2} = l$; so ist

$\text{Sin}\ \alpha = \frac{n}{l}$; $\text{Cos}\ \alpha = \frac{b}{l}$; $\text{Sin. } DAG = \text{Cos}\ AGD = \frac{h}{d}$;

$\text{Sin}\ AGD = \text{Cos}\ DAG = \frac{b}{d}$; nun verhält sich aber

$AG : AF = \text{Sin}\ AFG : \text{Sin}\ AGF$, oder

$d : AF = \text{Sin}\ 45 : \text{Sin}\ [AGD + \alpha - 45]$; folglich ist

$$AF = d\ [\text{Sin}\ (AGD + \alpha) - \text{Cos}\ (AGD + \alpha)]$$

$$= d\left[\frac{b}{d}\frac{b}{l} + \frac{h}{d}\frac{n}{l} - \frac{h}{d}\frac{b}{l} + \frac{b}{d}\frac{n}{l}\right]$$

$$= \frac{b\,[b-h] + n\,[b+h]}{l};$$ also

$$x = \frac{\frac{1}{2}AF}{\text{Cos}\ FAT} = \frac{AF}{2\ \text{Sin}\ \alpha},$$ oder nach Substitution der Werthe

$$x = \frac{b\,[b-h] + n\,[b+h]}{2n}.$$

Auf ähnlichem Wege ergibt sich

$$y = \frac{b\,[h-n]}{b-n}.$$

Fig. 9. d) Es soll, wenn Fig. 9. $MD = DG = b$ und $DA = h$ gegeben ist, die Weite $NC = 2a$ werden; wie groß müssen $AT = x$ und $FG = FC = y$ seyn?

Es ist 1) $(x-y)^2 = (b-y)^2 + (x-h)^2$

2) $x-y : b-y = x : a.$

Hieraus ergibt sich $y = \frac{3 b^2 + h^2 - 2 a (b + h)}{4 (b - a)}$

$- \sqrt{\left[\frac{3 b^2 + h^2 - 2 a (b + h)}{4 (b - a)}\right]^2 - \frac{b^2 + h^2}{2}};$

$x = \frac{b + h}{4} \pm \sqrt{\frac{(b + h)^2}{16} - \frac{a (b^2 + h^2)}{2 (a - b + h)}}.$

e) Das Gewölbe soll aus fünf Kreisbogen so zusammengesetzt werden, daß von den vier Seitenbogen jeder einen Winkel von 30°, und der Mittelbogen einem von 60° zugehören soll; überdem soll, wenn K Fig. 12. der Mittelpunkt zu B L und C der, zu B D ist, G K = K L werden. Fig. 12.

Es sey $EL = b$; $EF = h$; $KB = KL = x$; $CB = CD = y$; $FN = ND = z$; so ist $CK = y - x$; also $GC = GK = \frac{y - x}{2 \operatorname{Cos} 30} = \frac{y - x}{\sqrt{3}}$; folglich $NG = z - y + \frac{y - x}{\sqrt{3}}$.

Daher $EG = NG \operatorname{Sin} 30 = \frac{1}{2} z - \frac{1}{2} y + \frac{y - x}{2\sqrt{3}}$;

und $NE = NG \operatorname{Cos} 30 = \frac{y-x}{2} + \frac{1}{2} (z - y) \sqrt{3}$.

Demnach muß der Aufgabe gemäß $GK = KL$ oder

1) $x = \frac{y - x}{\sqrt{3}}$; ferner $KL + GK + EG = b$, oder

2) $x + \frac{y - x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} z - \frac{1}{2} y + \frac{y - x}{2 \sqrt{3}} = b$;

und $NE + EF = NF$, oder

3) $\frac{y - x}{2} + \frac{1}{2} (z - y) \sqrt{3} + h = z$ seyn.

Aus diesen drey Gleichungen erhält man

$$x = \frac{h - (2 - \sqrt{3})\, b}{3\sqrt{3} - 4}$$

$$y = \frac{(\sqrt{3} + 1)\, h - (\sqrt{3} - 1)\, b}{3\sqrt{3} - 4};$$

$$z = \frac{3\, b - (4 - \sqrt{3})\, h}{3\sqrt{3} - 4};$$

oder, wenn man Zähler und Nenner mit $3\sqrt{3} + 4$ multipliciret

$$x = \frac{[3\sqrt{3} + 4]\, h - [2\sqrt{3} - 1]\, b}{11} = 0{,}836\, h - 0{,}224\, b,$$

$$y = \frac{(13 + 7\sqrt{3})\, h - (5 + \sqrt{3})\, b}{11} = 2{,}284\, h - 0{,}612\, b,$$

$$z = \frac{3\,(3\sqrt{3} + 4)\, b - (8\sqrt{3} + 7)\, h}{11} = 2{,}508\, b - 1{,}896\, h.$$

Aufgabe 25.

Der Inhalt eines Kugelausschnitts sey $= a$; der des zugehörigen Kugelabschnitts $= b$; wie groß ist x als Höhe des Kugelabschnitts und y als Halbmesser der zugehörigen Kugel?

Auflösung.

Es ist 1) $\frac{2}{3} y^2 \pi x = a$; und

2) $\frac{1}{3} x^2 \pi (3y - x) = b$.

Aus beiden Gleichungen ergibt sich

$$y^6 - \frac{9a^2}{4b\pi} y^3 + \frac{9a^3}{8b\pi^2} = 0;$$ also ist

$$y = \sqrt[3]{3a\,\frac{3a \pm \sqrt{a(9a - 8b)}}{8b\pi}}.$$

Aus diesem Resultat ersieht man, daß 9 a nie größer als 8 b seyn kann, und daß, wenn 9 a = 8 b ist,

$$y = \sqrt[3]{\frac{a}{\pi}};$$ und $x = \frac{3}{2} y$ wird.

Ist also $y = r$, und man sucht denjenigen Werth für x, für welchen das Verhältniß des Kugelabschnitts zum gehörigen Kugelausschnitt ein Maximum wird, so muß man $x = \frac{3}{2} r$ erhalten.

Es wird auch $\frac{b}{a} = \frac{x^2 (3r - x)}{2r^2 x}$, oder $x(3r - x)$; für $x = \frac{3}{2} r$ am größten.

Ist $a = 300$, $b = 324$; so wird $y = \begin{cases} 5{,}98145 \\ 3{,}94634 \end{cases}$ und $x = \begin{cases} 4{,}00360 \\ 9{,}19764 \end{cases}$, so daß also nur die ersten Werthe möglich sind.

Aufgabe 26.

Den Cubic-Inhalt einer körperlichen Zone darzustellen.

Auflösung.

Es sey der Halbmesser der untern Grundfläche, $AB = R$, Fig. 13. der der obern $CD = r$; die Höhe $AC = h$. Man setze die Ergänzungshöhe $CF = y$; und den Halbmesser der Kugel $EB = EF = x$; so ist der Kugelabschnitt GBF Fig. 13.

$= \frac{1}{3}\pi(h+y)^2\,[3x-h-y]$; und der IFD $= \frac{1}{3}\pi y^2\,[3x-y]$; also die körperliche Zone, als der Unterschied beider

$$= \frac{1}{3} h\pi\,[3hx+6xy-h^2-3hy-3y^2].$$

Nun verhält sich aber 1) $y:r = r:2x-y$,

$$2)\ y+h : R = R : 2x-h-y,$$

und hieraus ist $R^2+r^2 = 4xy+2hx-2hy-2y^2-h^2$, oder

$$\tfrac{3}{2}(R^2+r^2) = 6xy+3hx-3hy-3y^2-\tfrac{3}{2}h^2,$$

folglich die körperliche Zone $= \frac{1}{3}h\pi\,[\frac{3}{2}(R^2+r^2)+\frac{1}{2}h^2]$

$$= \tfrac{1}{6}\pi h\,[3(R^2+r^2)+h^2].$$

Aus dieser Formel ersieht man, daß die körperliche Zone gleich drey Körpern ist: 1) einem Cylinder der $R^2\pi$ zur Grundfläche, und $\frac{1}{2}h$ zur Höhe hat; 2) einem Cylinder der $r^2\pi$ zur Grundfläche, und ebenfalls $\frac{1}{2}h$ zur Höhe hat, und 3) einer Kugel, deren Durchmesser $= h$ ist.

Aufgabe 27.

Fig. 14. Die Kugel B, Fig. 14. deren Halbmesser $= r$ ist, soll von der Kugel A, deren Halbmesser $= R$ ist, $\frac{n}{m}$ abschneiden, wie groß muß die Entfernung beider Mittelpunkte $GD = x$ seyn?

Auflösung.

Es sey $NT = w$, $NM = y$, $KN = z$, so ist

1) $z+y = R+r-x$

2) $w^2 = 2Ry-y^2$,

3) $w^2 = 2rz - z^2$,

4) $\frac{1}{3}\pi y\ [3R - y] + \frac{1}{3}\pi z^2 (3r - z) = \frac{n}{m} \frac{4}{3} R^3 \pi$.

Die Verbindung von 1) 2) und 3) giebt

$2Ry - y^2 = 2r[R + r - x - y] - [R + r - x - y]^2$

woraus $y = \frac{r^2 - (x - R)^2}{2x}$, und dann aus 1) $z = \frac{R^2 - (x - r)^2}{2x}$ folgt. Werden diese beiden Werthe in 4) gesetzt, so ergiebt sich nach gehöriger Reduction

$x^4 - 6(R^2 + r^2)x^2 + 8\left[R^3 + r^3 - \frac{2n}{m} R^3\right]x - 3(R^2 - r^2)^2 = 0.$

Ist $R = r$; so wird hieraus

$x^3 - 12r^2 x + 16 \frac{m - n}{m} r^3 = 0$, welche für $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$; $x^3 - 12r^2 x + 8r^3 = 0$ giebt.

Die drey Wurzeln dieser Gleichung sind

$+0{,}6946\,r$; $+3{,}0641\,r$; $-3{,}7587\,r$,

von welchen nur die erste hier gelten kann.

Aufgabe 28.

Wie groß muß der Halbmesser $BC = GH = x$ Fig. 15. der Grundfläche eines senkrechten Cylinders genommen werden, damit derselbe, wenn er in eine Kugel, deren Halbmesser $= r$ ist, so eingeschoben wird, daß der Mittelpunkt der Kugel in die Achse des Cylinders fällt, $\frac{n}{m}$ vom Inhalt der Kugel einnehme? Fig. 15.

Auflösung.

Man setze BF = FG = $\sqrt{r^2 - x^2} = y$, so ist jeder der beiden vom Cylinder verdrängten Kugelabschnitte

$= \frac{1}{3}\pi (r - y)^2 [2r + y]$, und der Cylinder

$= 2x^2 \pi y$; daher muß

$$2x^2 \pi y + \frac{2}{3}\pi (r - y)^2 [2r + y] = \frac{n}{m}\frac{4}{3} r^3 \pi \text{ seyn.}$$

Wird der Werth für y substituirt, so ergiebt sich nach gehöriger Umformung

$\frac{m - n}{m} r^3 = (r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}$ oder $= y^3$; daher ist

$$y = r\sqrt[3]{1 - \frac{n}{m}};$$

$$x = r\sqrt{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{n}{m}\right)^2}}.$$

Aufgabe 29.

Den Umfang und Inhalt eines Ikosaeders zu bestimmen.

Auflösung.

Fig. 16. Es sey C Fig. 16. der Mittelpunkt, AB eine Achse desselben. In irgend einem zu bestimmenden Punkt dieser Achse liegt der Mittelpunkt D des regulären Fünfecks HGEFI, dessen Halbmesser DE = DG, wenn die Seite dieses regulären Fünfecks, als die Seite der den Körper begrenzenden regulären Dreiecke mit b bezeichnet wird,

$$= \sqrt{\frac{b\sqrt{2}}{5-\sqrt{5}}}$$ ist; (s. die Anmerkung.)

folglich ist $BD^2 = BE^2 - DE^2$; also

$$BD = \sqrt{b^2 - \frac{2b^2}{5-\sqrt{5}}} = b\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}.$$

Wird nun die halbe Achse $AC = CB$ mit z bezeichnet, so verhält sich $BD : DE = DE : 2z - BD$, woraus man, nach Substitution der Werthe für DE und BD

$$z = \tfrac{1}{2} b \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$ erhält.

Wird nun irgend eine Seite, etwa KL in M halbirt, MG gezogen, und aus dem Mittelpunkt C das Perpendikel CN auf MG gefällt, so ist CN die Höhe der Pyramide CKGL.

Weil nun $MG = \tfrac{1}{2} b\sqrt{3}$; $MC = \sqrt{z^2 - \tfrac{1}{4}b^2}$ und $MC^2 - MN^2 = CG^2 - (MG - MN)^2$, oder $z^2 - \tfrac{1}{4}b^2 - MN^2 = z^2 - (\tfrac{1}{2}b\sqrt{3} - MN)^2$ ist, so wird

$$MN = \tfrac{1}{6} b\sqrt{3}\text{; daher}$$

$$CN = \sqrt{MC^2 - MN^2} = \sqrt{z^2 - \tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{12}b^2}$$

$$= \tfrac{1}{2} b \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}.$$

Es ist aber die Grundfläche $KLG = \tfrac{1}{4} b^2 \sqrt{3}$, folglich die Pyramide

$$CKGL = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{4} b^2 \sqrt{3} \cdot \tfrac{1}{2} b \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$$

$$= \tfrac{1}{24} b^3 \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}.$$

Daher der Inhalt des ganzen Insonders

$$= \frac{5}{6} b^3 \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}} \text{ oder auch} = 2{,}1814\, b^3.$$

Die Oberfläche desselben ist $= 20 \frac{1}{4} b^2 \sqrt{3} = 5 b^2 \sqrt{3} = 8{,}66\, b^2$.

Fig. 17. Anmerk. Es sey Fig. 17. $AB = a$, die Seite des regulären Zehnecks; $AE = BE = r$ der zugehörige Halbmesser, und $AC = f$ die Seite des in demselben Kreis beschriebenen regulären Fünfecks; so ist $\angle \beta = 36°$; also $\angle EAB = \angle ABE = 72°$; man halbire den $\angle EAB$ durch AD, so wird $\gamma = 36° = \beta$; also $AD = DE$, der $\angle DAB$ wird aber auch $= 36°$, daher der $ADB = 72° = ABD$; folglich ist auch $AB = AD = DE = a$; und $\triangle ABD \sim ABE$. Daher verhält sich $AE : AB = AB : BD$; oder

$$r : a = a : r - a,$$

und hieraus ergiebt sich

$$a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} r;\; r = \frac{2a}{-1 + \sqrt{5}}.$$

Nun verhält sich ferner $BN : BA = BA ; 2r$; daher ist $BN = \frac{a^2}{2r} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} r$; folglich $NA = \sqrt{a^2 - BN^2}$; daher $2\,NA$ oder

$$f = r\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}};\; r = f\sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{5}}}.$$

Aufgabe 30.

Den Inhalt und die Oberfläche eines Dodekaeders zu bestimmen.

Auflösung.

Man lege parallel mit zweien unter sich parallelen Fig. 18. begrenzenden Fünfecken ABCDE, FGHIK Fig. 18.

durch den Mittelpunkt V des Dodekaeders die Ebene LMNOPQRSTU, so halbirt diese 10 Seiten der begrenzenden regulären Fünfecke, und ist ein reguläres Zehneck. Bezeichnet man nun die Seite des regulären Fünfecks mit b, und ist W der Mittelpunkt des Fünfecks BCZYX, so ist der Halbmesser desselben $WX = WY$ $= b\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}$ (s. die vorige Anmerkung.) und nun ergiebt sich aus der Gleichung

$$WX^2 - W\alpha^2 = XY^2 - (WY - W\alpha)^2, \text{ oder}$$

$$\frac{2\,b^2}{5-\sqrt{5}} - W\alpha^2 = b^2 - \left(\frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} - W\alpha\right)^2;$$

$$W\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\,b.$$

Demnach ist die Seite des regulären Zehnecks

$$MN = \tfrac{1}{2}XZ = X\alpha = \sqrt{XW^2 - W\alpha^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,b\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}};$$

folglich der zugehörige Halbmesser nach der vorigen Anmerkung

$$VM = \frac{2\,MN}{-1+\sqrt{5}} = \tfrac{1}{4}\,b\,[3+\sqrt{5}].$$

Weil nun $MW^2 = WY^2 - MY^2$

$$= \frac{2\,b^2}{5-\sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\,b^2$$

$= \tfrac{1}{4}\,b^2\,\frac{5+2\sqrt{5}}{5}$; so ist die Höhe VW der fünfseitigen Pyramide $BCZYXV = \sqrt{MV^2 - MW^2}$

$$= \frac{1}{2} b \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}.$$

Da nun ferner jedes der 12 begrenzenden regulären Fünfecke aus 5 congruenten Dreiecken besteht, von welchen jedes $= \frac{1}{2} XY . MW$

$= \frac{1}{4} b^2 \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}$ ist, so ist also der Inhalt jedes solchen regulären Fünfecks

$= \frac{5}{4} b^2 \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}$; also der Inhalt jeder fünfseitigen Pyramide

$$= \frac{5}{4} b^2 \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} . \frac{1}{3} . \frac{1}{2} b \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{5}}$$

$$= \frac{1}{24} b^3 \sqrt{\tfrac{5}{2}(47 + 21\sqrt{5})}.$$

Daher der Inhalt des ganzen Dodekaeders

$$= \frac{1}{2} b^3 . \sqrt{5 \frac{47 + 21\sqrt{5}}{2}}$$

$$= 7{,}6625\ b^3.$$

Die gesammte Oberfläche desselben ist

$$= 15\ b^2 \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}$$

$$= 20{,}6445\ b^2.$$

Aufgabe 31.

Den Cubic-Inhalt des windschiefen Daches bis zu einer in beliebiger Höhe liegender mit der Grundfläche ECDF parallelen Ebene NUPQ zu bestimmen. Fig. 19.

Auflösung.

Es sey A′B′ AB eine durch die Forstlinie A′B′ gelegte lothrechte Ebene CD ⫩ AB; $TB = h'$; $AB = l$; $AA' = h$; $AE = a$; $BF = b$; $AI = x$; $IG = y$; so verhält sich, wenn EL parallel AB und die lothrechte Ebene HIG parallel mit denen EA′C, FB′D ist.

$$EK : KG = EL : LF, \text{ oder}$$

$$x : y - a = l : b - a; \text{ hieraus folgt}$$

$$y = \frac{b-a}{l} x + a, \text{ und daher ist}$$

$$dy = \frac{b-a}{l} dx.$$

Nun ist aber der Körper zwischen den beiden parallelen Ebenen NMEA und WVGI, oder

$$K = \int WVGI \, . \, dx$$

$$= \int \frac{WV + GI}{2} \, . \, h' dx \text{ und}$$

aus der Proportion $HV : VW = HI : IG$, oder

$$h - h' : VW = h : y \text{ ergiebt sich}$$

$$VW = \frac{h-h'}{h} \left[\frac{b-a}{l} x + a\right].$$

Es ist also, wenn dieser Werth für VW substituirt, und $\frac{b-a}{l} x + a$ oder y für GI gesetzt wird

$$K = \tfrac{1}{2} h' \int \left[\frac{h-h'}{h} \cdot \frac{b-a}{l} x + \frac{h-h'}{h} a + \frac{b-a}{l} x + a\right] dx$$

$$= \tfrac{1}{2} h' \int \left[\frac{2h-h'}{h} a + \frac{2h-h'}{h} \cdot \frac{b-a}{l} x\right] dx$$

$$= \tfrac{1}{2} h' \frac{2h-h'}{h} \left[a x + \frac{b-a}{l} \tfrac{1}{2} x^2\right] + C.$$

Für $x = 0$; wird K und auch $C = 0$.

Es bleibt also vollständig

$$K = \frac{h'(2h - h')}{2h} x \left[a + \frac{b-a}{2l} x\right].$$

Für $x = l$ giebt diese Formel den Inhalt zwischen den parallelen Ebenen NMEA und UTFB

$$= \frac{h'(2h - h')l}{2h} \cdot \frac{a+b}{2}.$$

Es ist also dieser Inhalt gleich dem arithmetischen Mittel zwischen den beiden Ebenen NMEA und UTBF multiplicirt mit der Länge l.

Wird $h' = h$ gesetzt, so ergiebt sich der Cubic-Inhalt zwischen den beiden Ebenen A'EA und B'FB

$$= \frac{hl}{2} \cdot \frac{a+b}{2}.$$

Aufgabe 32.

Die Oberfläche des windschiefen Daches zu bestimmen.

Auflösung.

Bey derselben Bezeichnung wie in 31. ist die Linie

$GH = \sqrt{h^2 + y^2}$; also die Fläche

A'EHG oder $f = \int \sqrt{h^2 + y^2} \cdot dx$.

Wird der Werth für dx aus 31 substituirt, so entsteht

$$f = \frac{l}{b-a} \int \sqrt{h^2 + y^2} \cdot dy;$$

oder, wenn $y = h \operatorname{tg} z$ gesetzt wird

$$f = \frac{h^2 l}{b-a} \int \sqrt{1 + \operatorname{tg} z^2}\, d \operatorname{tg} z$$

$$= \frac{h^2 l}{b-a} \int \operatorname{Sec} z\, d \operatorname{tg} z$$

Da

Da $d\,tg\,z = Sec\,z^2\,dz$ ist, so kann man auch setzen

$$f = \frac{h^2\,l}{b-a} \int Sec\,z^3\,dz = \frac{h^2\,l}{b-a} \int \frac{dz}{Cos\,z^3}$$

$$= \frac{h^2\,l}{b-a} \left[\tfrac{1}{2} Sec\,z\,tg\,z + \tfrac{1}{4}\,logn\,\frac{1+Sin\,z}{1-Sin\,z}\right] + C.$$

Wird hierin $\frac{y}{h}$ für $Tg\,z$; und $\frac{\sqrt{h^2+y^2}}{h}$ für $Sec\,z$; also $\frac{Tg\,z}{Sec\,z}$ oder $\frac{y}{\sqrt{h^2+y^2}}$ für $Sin\,z$ gesetzt, so erhält man

$$f = \frac{h^2\,l}{4(b-a)} \left[\frac{2y\sqrt{h^2+y^2}}{h^2} + logn\,\frac{y+\sqrt{h^2+y^2}}{-y+\sqrt{h^2+y^2}}\right]$$

$+ C$

für $y = a$; wird $f = 0$; also ist

$$C = -\frac{h^2\,l}{4(b-a)} \left[\frac{2a\sqrt{h^2+a^2}}{h^2} + logn\,\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{-a+\sqrt{a^2+h^2}}\right];$$

daher ist vollständig

$$f = \frac{h^2\,l}{4(b-a)} \cdot \left[2\,\frac{y\sqrt{h^2+y^2} - a\sqrt{h^2+a^2}}{h^2} + logn\,\frac{[y+\sqrt{h^2+y^2}]\,[-a+\sqrt{h^2+a^2}]}{[-y+\sqrt{h^2+y^2}]\,[a+\sqrt{h^2+a^2}]}\right].$$

Man erhält daher, wenn $y = b$ gesetzt wird, die gesammte windschiefe Fläche $A'EFB'$

$$= \frac{h^2\,l}{4(b-a)} \left[2\,\frac{b\sqrt{b^2+h^2} - a\sqrt{a^2+h^2}}{h^2} + logn\,\frac{(b+\sqrt{b^2+h^2})\,(-a+\sqrt{a^2+h^2})}{(-b+\sqrt{b^2+h^2})\,(a+\sqrt{a^2+h^2})}\right],$$

oder, wenn man den Zähler und Nenner des zweiten Gliedes in der Klammer mit dem Zähler multiplicirt

$$A'EFB' = \frac{h^2 l}{2(b-a)} \left[\frac{b.\sqrt{b^2+h^2} - a\sqrt{a^2+h^2}}{h^2} + \text{logn}\, \frac{(b+\sqrt{b^2+h^2})(-a+\sqrt{a^2+h^2})}{h^2}\right].$$

Eine Näherungsformel würde seyn $\frac{A'E+B'F}{2}\,l$ oder

$$A'EFB' = \frac{\sqrt{a^2+h^2}+\sqrt{b^2+h^2}}{2}\,.\,l.$$

Wäre in einem speciellen Fall $h = 18'$; $a = 13{,}5$; $b = 24$; $l = 100$;
so gäbe die richtige Formel $2607\frac{3}{4}$;
die Näherungs-Formel 2625.

Aufgabe 33.

Den Cubic-Inhalt eines Bohlendachs mit ganzen Walmen zu bestimmen.

Auflösung.

Fig. 21. Es sey das Rechteck POQT, Fig, 21. die Grundfläche dieses Daches; die Länge desselben PT = OQ = L; die Breite PO = QT = 2 b.

Man fälle von den Anfallspunkten G, N der Walmen, die lothrechten Linien GI, NL = h auf die Grundfläche POQT herab, und ziehe mit PO, QT die Parallel-Linien $\delta\epsilon$, $\mu\varrho$ durch I und L, und dann die Linie KM ebenfalls durch I und L, so halbirt diese das Rechteck POQT, und es wird, wenn die Wal-

men denselben Halbmesser und dieselbe Neigung wie das Dach haben, $KI = I\varepsilon = I\delta = LM = L\varrho = L\mu = b$. Ist nun Fig. 20. μ der Mittelpunkt zum Bogen $\delta\alpha G$, und setzt man den Halbmesser $\delta\mu = G\mu = r$; so ist, wenn man $\delta G = \sqrt{b^2 + h^2}$ mit l bezeichnet,

$$\text{Cos}\,\delta G\mu = \frac{l}{2r}; \text{ folglich}$$

$$\text{Sin}\,\delta G\mu = \sqrt{\frac{4r^2 - l^2}{4r^2}};$$

ferner wenn Fig. 20. $\mu\sigma$ senkrecht auf die Höhe GI gezogen wird

$$\text{Sin}\,\delta GI = \frac{b}{l}; \text{ Cos}\,\delta GI = \frac{h}{l}; \text{ also}$$

$$\text{Sin}\,\sigma G\mu = \text{Sin}\,(\delta G\mu - \delta GI)$$

$$= \text{Sin}\,\delta G\mu\,\text{Cos}\,\delta GI - \text{Cos}\,\delta G\mu\,\text{Sin}\,\delta GI$$

$$= \frac{h}{l} \cdot \frac{\sqrt{4r^2 \quad l^2}}{2r} - \frac{l}{2r} \cdot \frac{b}{l}$$

$$= \frac{h}{2r} \cdot \sqrt{\frac{4r^2 - b^2 - h^2}{b^2 + h^2}} - \frac{b}{2r}; \text{ demnach}$$

$$\sigma\mu = r\,\text{Sin}\,\sigma G\mu = \frac{h}{2} \cdot \sqrt{\frac{4r^2 - b^2 - h^2}{b^2 + h^2}} - \frac{b}{2}$$

wofür a gesetzt werden soll.

Es ist also $G\sigma = \sqrt{r^2 \quad a^2}$; folglich

$$I\sigma = -h + \sqrt{r^2 - a^2}.$$

Wird daher $I\beta$ mit x, und der Bogen zum $< \alpha\mu\sigma$ (für den Halbmesser $= 1$) mit y bezeichnet, so ist r Sin $y = \beta\sigma = (x - h) + \sqrt{r^2 - a^2}$; daher

$x = r \operatorname{Sin} y + h - \sqrt{r^2 - a^2}$; folglich, wenn ABCD parallel mit der Grundfläche POQT genommen wird,

$$\alpha\beta = \beta E = r \operatorname{Cos} y - a.$$

Ferner ist $EF = L + 2\beta E$

$$= L - 2b + 2r \operatorname{Cos} y - 2a,$$

oder, wenn man $L - 2a - 2b$ mit n bezeichnet,

$$EF = n + 2r \operatorname{Cos} y.$$

Demnach ist das Rechteck ABCD

$$= 2\alpha\beta \,.\, EF$$

$$= 2(r \operatorname{Cos} y - a)(n + 2r \operatorname{Cos} y)$$

$$= -2an + (2nr - 4ar) \operatorname{Cos} y + 4r^2 \operatorname{Cos} y^2.$$

Zur Abkürzung setze man

$$2an = A;\ 2nr - 4ar = B;\ 4r^2 = D;$$

so hat man die Ebene ABCD

$$= -A + B \operatorname{Cos} y + D \operatorname{Cos} y^2.$$

Weil nun $x = r \operatorname{Sin} y + h - \sqrt{r^2 - a^2}$ ist; so ist auch

$$dx = r d \operatorname{Sin} y,$$

folglich ist das veränderliche Stück des Dachkörpers zwischen den beiden parallelen Ebenen POQT und ABCD

$$= r \int (-A + B \operatorname{Cos} y + D \operatorname{Cos} y^2)\, d \operatorname{Sin} y$$

$$= r \,.\, \begin{cases} -A \int d \operatorname{Sin} y \\ +B \int \operatorname{Cos} y\, d \operatorname{Sin} y = +B \int \operatorname{Cos} y^2\, dy \\ +D \int \operatorname{Cos} y^2\, d \operatorname{Sin} y = +D \int \operatorname{Cos} y^3\, dy. \end{cases}$$

Das erste dieser drey Integrale ist $= -A \operatorname{Sin} y$.

Das zweite $= \frac{1}{2} B (y + \operatorname{Sin} y \operatorname{Cos} y)$.

Das dritte $= D\,(\frac{1}{3}\,Cos\,y^2 + \frac{2}{3})\,Sin\,y = +D$ $(Sin\,y - \frac{1}{3}\,Sin\,y^3)$.

Die Summe mit r multiplicirt, oder

$r\,.\,[(D - A)\,Sin\,y + \frac{1}{2}\,By + \frac{1}{2}\,B\,Sin\,y\,Cos\,y - \frac{1}{3}D\,Sin\,y^3] + C$ giebt den Inhalt des Körpers zwischen den beiden parallelen Ebenen ABCD und POQT.

Für $x = o$ wird $r\,Sin\,y = -h + \sqrt{r^2 - a^2}$, aber dieser Körper $= o$; daher ist, wenn $\frac{-h+\sqrt{r^2-a^2}}{r}$ mit e bezeichnet wird

$C = -r\,[(D-A)\,e + \frac{1}{2}B\,Arc\,Sin\,e + \frac{1}{2}B\,e\,\sqrt{1-e^2} - \frac{1}{3}\,D\,e^3]$.

Demnach ist der verlangte Körper zwischen den beiden parallelen Ebenen ABCD und POQT vollständig $= r\,[(D-A)\,(Sin\,y - e) + \frac{1}{2}\,B\,(y - Arc\,Sin\,e) + \frac{1}{2}B\,[Sin\,y\,Cos\,y - e\sqrt{1 - e^2} + \frac{1}{3}D\,[e^3 - Sin\,y^3]]$.

In diesem Ausdruck ist

$$l = \sqrt{b^2 + h^2}$$

$$a = \frac{h}{2}\sqrt{\frac{4\,r^2 - l^2}{l^2}} - \frac{b}{2}$$

$$n = L - 2a - 2b$$

$$A = 2\,an$$

$$B = 2\,nr - 4\,ar$$

$$D = 4\,r^2$$

$$e = \frac{-h + \sqrt{r^2 - a^2}}{r}$$

$$Sin\,y = \frac{x - h + \sqrt{r^2 - a^2}}{r},$$ also

$$y = \text{Arc Sin} \frac{x - h + \sqrt{r^2 - a^2}}{r}.$$

Setzt man in denselben $x = h$; so erhält man den Inhalt des ganzen Daches.

Setzt man $L = 2b$, so erhält man jedes mit der Grundfläche ‡ in der Entfernung x abgeschnittene Stücke
Fig. 22. eines Bohlendachs wie Fig. 22; nämlich den zwischen den beiden Ebenen ABCD und POQT liegenden Körper. Fig. 22.

Setzt man $L = 2b$ und $x = h$, so erhält man den Inhalt des ganzen Bohlendachs. Fig. 22.

Es sey z. B. $L = 200'$; $b = 20'$; ferner sey r und h durch folgende Construction bestimmt;
Fig. 20. man theile $\delta\varepsilon$ Fig. 20 in vier gleiche Theile, und mache $\delta G = G\varepsilon = \delta\mu = G\mu = r = \frac{3}{4}\,\delta\varepsilon$.

Hiernach ist $r = \frac{3}{4} \cdot 40 = 30$; $h = \sqrt{30^2 - 20^2} = 22{,}36$. Will man nun den Inhalt bis zur halben Höhe $x = 11{,}18$ haben, so hat man

$L = 200'$; $b = 20'$; $l = r = 30'$; $h = 22{,}36'$;
$x = 11{,}18'$; $a = 9{,}364'$; $n = 141{,}272'$;
$A = 2645{,}74'$; $B = 7352{,}64'$; $D = 3600$
$e = 0{,}20466$; $\text{Sin}\, y = 0{,}57733$;
$y = \text{Arc Sin}\ 0{,}57733 = \text{Arc}\ 35°16' = \frac{35°16'}{360}$
$2 \cdot 3{,}14 = 0{,}6152$.

Eben so erhält man Arc Sin $e = 0{,}20606$, und nun nach Substitution aller dieser Werthe den Inhalt des Daches bis zu der bestimmten Höhe $= 79110$ Cubicfuß.

Aufgabe 34.

Die Oberfläche eines Bohlendachs mit Walmen zu bestimmen.

Auflösung.

Es ist, wie in voriger Aufgabe bei derselben Bezeichnung und denselben Figuren

$AB = \alpha\gamma = 2\,(r\,\mathrm{Cos}\,y - a)$ folglich

die Fläche APOB

$$= 2\int (r\,\mathrm{Cos}\,y - a)\,d\,\mathrm{Arc}\,KE$$
$$= 2r\int (r\,\mathrm{Cos}\,y - a)\,dy$$
$$= 2r\,(r\,\mathrm{Sin}\,y - ay) + C.$$

Für $x = o$; wird $\mathrm{Sin}\,y = \frac{-h + \sqrt{r^2 - a^2}}{r}$

$= e$; also

$C = -2r\,(re - a\,\mathrm{Arc}\,\mathrm{Sin}\,e)$; daher die Ebene APOB vollständig

$$= 2r\,[r\,(\mathrm{Sin}\,y - e) - a\,(y - \mathrm{Arc}\,\mathrm{Sin}\,e)].$$

Da ferner $AC = EF = n + 2r\,\mathrm{Cos}\,y$ ist, so ist die Fläche ACTP

$$= r\int (n + 2r\,\mathrm{Cos}\,y)\,dy$$
$$= r\,[ny + 2r\,\mathrm{Sin}\,y] + C$$

und $C = -r\,[n\,\mathrm{Arc}\,\mathrm{Sin}\,e + 2re]$, also vollständig die Fläche ACTP =

$$r\,[2r\,(\mathrm{Sin}\,y - e) + n\,[y - \mathrm{Arc}\,\mathrm{Sin}\,e]].$$

Demnach ist die gesammte sphäroidische Oberfläche eines solchen Bohlendachs, zwischen zweien ♃ in

der Entfernung x von einander liegenden Ebenen ABCD, POQT

$= 8r^2 [\text{Sin}\, y - e] - 2(2ar - rn)(y - \text{Arc Sin}\, e)$, oder nach Substitution

$= 8rx + 2r[L - 2b - 4a] [\text{Arc Sin} \frac{x - h + \sqrt{r^2 - a^2}}{r}$

$- \text{Arc Sin} \frac{-h + \sqrt{r^2 - a^2}}{r}]$.

In demselben speciellen Fall wie in Aufgabe 33. erhält man $13067\frac{1}{2}$ Quadratfuß.

Aufgabe 35.

Die Oberfläche eines elliptischen Sphäroids zu quadriren.

Auflösung.

Erstens desjenigen, welches durch Umdrehung um die große Achse erzeugt wird.

Fig. 23. Es sey Fig. 23. die große Achse SH $= a$; die kleine PC $= c$; DE $= u$; EW $= y$; EH $= x$, so ist die sphäroidische Oberfläche F, welche die elliptische Linie WH bei der Umdrehung um EH beschreibt

$$= 2\pi \int EW\, d\, \text{Arc}\, HW$$
$$= 2\pi \int y\, [(dx)^2 + (dy)^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2\pi \int y\, [(-du)^2 + (dy)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Weil nun $y^2 = \frac{c^2}{a^2} [\frac{1}{4} a^2 - u^2]$, also $dy = \frac{c^2}{a^2} \frac{u}{y} (-du)$ und $(dy)^2 = \frac{c^4}{a^4} \frac{u^2}{y^2} (-du)^2$ ist, so ist auch

$$F = 2\pi \int y \left[(-du)^2 + \frac{c^4}{a^4} \cdot \frac{u^2}{y^2} (-du)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= -2\pi \int \left[y^2 + \frac{c^4}{a^4} u^2\right]^{\frac{1}{2}} du$$

$$= -2\pi \int \left[\frac{1}{4} c^2 - \frac{c^2}{a^2} u^2 + \frac{c^4}{a^4} u^2\right]^{\frac{1}{2}} du.$$

Man setze $-\frac{c^2}{a^2} u^2 + \frac{c^4}{a^4} u^2$ oder $\frac{-a^2 c^2 + c^4}{a^4} u^2$ $= -\frac{1}{4} c^2 \operatorname{Cos} \beta^2$, so wird

$$F = -c\pi \int \operatorname{Sin} \beta \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - c^2}} d \operatorname{Cos} \beta$$

$$= + \frac{a^2 c\pi}{2\sqrt{a^2 - c^2}} \int \operatorname{Sin} \beta^2 d\beta$$

$$= + \frac{a^2 c\pi}{4\sqrt{a^2 - c^2}} [\beta - \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Cos} \beta] + C$$

$$= \frac{a^2 c\pi}{4\sqrt{a^2 - c}} \left[\operatorname{Arc} \operatorname{Cos} \frac{2u\sqrt{a^2 - c^2}}{a^2} - \frac{2u\sqrt{a^2 - c^2}}{a^2} \frac{\sqrt{a^4 - 4u^2(a^2 - c^2)}}{a^2}\right] + C.$$

Für $x = 0$ wird $u = \frac{1}{2} a$ und $F = 0$; also

$$C = \frac{a^2 c\pi}{4\sqrt{a^2 - c^2}} \left[-\operatorname{Arc} \operatorname{Cos} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} + \frac{c}{a^2} \sqrt{a^2 - c^2}\right].$$

Daher ist vollständig

$$F = \frac{a^2 c\pi}{4\sqrt{a^2 - c^2}} \left[\operatorname{Arc} \operatorname{Cos} \frac{2u\sqrt{a^2 - c^2}}{a^2} - \operatorname{Arc} \operatorname{Sin} \frac{c}{a} + \frac{c}{a^2}\sqrt{a^2 - c^2} - \frac{2u\sqrt{a^2 - c^2}}{a^4} \sqrt{a^4 - 4u^2(a^2 - c^2)}\right].$$

Für $u = 0$ erhält man die Oberfläche des halben Sphäroids

$$= \frac{a^2 c\pi}{4\sqrt{a^2-c^2}} [\tfrac{1}{2}\pi - \text{Arc Sin} \frac{c}{a} + \frac{c}{a^2} \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$= \frac{a^2 c\pi}{4\sqrt{a^2-c^2}} [\text{Arc Cof} \frac{c}{a} + \frac{c}{a^2} \sqrt{a^2 - c^2}]$$

oder auch $= \frac{a c\pi}{4\sqrt{a^2-c^2}} [a. \text{Arc Cof} \frac{c}{a} + \frac{c}{a} \sqrt{a^2-c^2}]$.

Wird $a = c$; so giebt dieser letzte Ausdruck die halbe Kugelfläche $\frac{a c\pi}{4.0} [0 + \frac{c}{a} . 0]$

$$= \frac{a c\pi}{4.0} [1 + \frac{c}{a}] . 0$$

$$= \frac{a^2\pi}{4} . [1 + 1] = \tfrac{1}{2} a^2 \pi \text{ oder } = \tfrac{1}{2} c^2 \pi.$$

Ist $a = 5$; $c = 4$; so ist die Oberfläche des ganzen elliptischen Sphäroids $= 18,72486\,\pi$,
die zu a gehörige Kugelfläche $= 25\,\pi$
die zu c gehörige Kugelfläche $= 16\,\pi$.

Sollte die Oberfläche einer elliptischen Kuppel berechnet werden, in welcher folgende Abmessungen genommen worden: FG (Fig. 24.) als ein Theil der großen Achse $= 14'$; $FN = 9'$; GK senkrecht auf $FG = 10'$, und die mit GK ǂ Linie $NM = 9'$; so gäbe die allgemeine Gleichung $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax - x^2)$ hier

Fig. 24.

1) $10^2 = \frac{c^2}{a^2}(a.14 - 14^2)$

2) $9^2 = \frac{c^2}{a^2}(a.9 - 9^2)$

aus welchen beiden Gleichungen sich $a = 33,23$; $c = 20,26$ ergiebt. Substituirt man diese Werthe, und $\frac{1}{2}a - FG = 2,615$ für u in der gefundenen allgemeinen Gleichung, so ergiebt sich die Oberfläche, welche FK bei der Umdrehung um FG beschreibt $= 766,82$.

Zweitens desjenigen, welches durch die Umdrehung um die kleine Achse erzeugt wird.

Es sey Fig. 23. die Abscisse DV auf der kleinen Achse $= y$; die rechtwinklichte Ordinate $VK = u$; also Fig. 23.

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(\tfrac{1}{4}a^2 - u^2\right); \text{ und hieraus}$$

$$(-du)^2 = \frac{a^4\, y^2\, (dy)^2}{c^4\, u^2}.$$

Nun ist die Oberfläche F, welche SK bei der Umdrehung um DV beschreibt

$$= 2\pi \int u\left[(-du)^2 + (dy)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\pi \int \left[\frac{a^4\, y^2}{c^4} + u^2\right]^{\frac{1}{2}} dy$$

$$= 2\pi \int \left(\frac{a^4}{c^4}\, y^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{c^2 y^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy$$

$$= \frac{2\pi}{c^2} \int \left[\tfrac{1}{4}c^4 a^2 + (a^4 - a^2 c^2)\, y^2\right]^{\frac{1}{2}} dy.$$

Wird nun $(a^2 - c^2)\, y^2 = \frac{1}{4} c^4 \operatorname{tg} \beta^2$ gesetzt, so entsteht

$$dy = \frac{\frac{1}{2} c^2\, d \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{a^2 - c^2}}, \text{ also}$$

$$F = \frac{a\, c^2\, \pi}{2\sqrt{a^2 - c^2}} \int \sec \beta\, d \operatorname{tg} \beta$$

$$= \frac{a c^2 \pi}{4 \sqrt{a - c^2}} \left[\text{Sec}\, \beta\, \text{tg}\, \beta + \tfrac{1}{2} \text{logn} \frac{1 + \text{Sin}\, \beta}{1 - \text{Sin}\, \beta} \right] + C.$$

(s. Aufgabe 32.)

Die Constans ist hier $= 0$; weil für $y = 0$ auch F, und der ganze Ausdruck $= 0$ wird.

Setzt man $y = \frac{1}{2} c$; und nimmt den gefundenen Ausdruck doppelt, so ergiebt sich nach gehöriger Substitution und Reduction die ganze Oberfläche

$$= \frac{a c^2 \pi}{2 \sqrt{a^2 - c^2}} \left[\frac{a \sqrt{a^2 - c^2}}{c^2} + \text{logn} \frac{a + \sqrt{a^2 - c^2}}{c} \right].$$

Ist $a = 5$; und $c = 4$; so erhält man diese Fläche $= 21{,}74196 \,.\, \pi$.

Aufgabe 36.

Fig. 25. Es sey ABK Fig. 25. ein senkrechter Kegel, in welchem GH parallel KA; man soll den Inhalt des durch die Ebene EFG vom Kegel abgeschnittenen Körpers EGFB = K bestimmen.

Auflösung.

Es sey der Halbmesser AI = IB der Grundfläche $= r$; die Höhe KI des Kegels $= H$, die GN des abgeschnittenen Körpers, den man Kegel-Klaue nennen kann $= h$.

Man lege die Ebene $\gamma\delta\beta$ parallel mit der Grundfläche durch den Klauen, und setze ihre Entfernung NO von derselben $= x$; ihren Halbmesser $P\gamma = P\beta = P\delta = z$; so ist NB oder $\frac{1}{2}$ HB $= \frac{rh}{H}$; folglich

aus der Proportion KP : Pβ = KI : IB;

$$z = \frac{r\,(H-x)}{H} \text{ und aus der:}$$

GO : Tβ = KI : AB;

$$T\beta = \frac{h-x}{H}\,2r; \text{ folglich ist}$$

$$PT = r\,\frac{H-x}{H} \,.\!-\, 2r\,\frac{h-x}{H}$$

$$= \frac{r}{H}\,[H - 2h + x].$$

Bezeichnet man nun den zum veränderlichen $< \beta P \delta$ gehörigen Bogen für den Sintot = 1 mit α, so ist $\text{Cos}\,\alpha = \frac{H-2h+x}{H-x}$, folglich der Kreisabschnitt

$$\gamma\delta\beta = z^2\,[\alpha - \text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha]; \text{ daher}$$

der veränderliche Körper zwischen den beiden parallelen Ebenen $\gamma\beta\delta$ und EBF oder K'

$$= \int z^2\,(\alpha - \text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha)\,dx.$$

Es ist aber $\text{Cos}\,\alpha = \frac{H-2h+x}{H-x}$; und hieraus

$$x = \frac{H\,\text{Cos}\,\alpha - H + 2h}{1 + \text{Cos}\,\alpha}; \text{ folglich}$$

$$dx = \frac{2\,(H-h)\,d\,\text{Cos}\,\alpha}{(1 + \text{Cos}\,\alpha)^2}.$$

Wird nun dieser Werth für dx und der

$$\frac{r}{H}\,(H-x) = \frac{r}{H}\left[H - \frac{H\,\text{Cos}\,\alpha - H + 2h}{1 + \text{Cos}\,\alpha}\right]$$

$= \frac{r}{H} \cdot \frac{2\,(H-h)}{1 + \text{Cos}\,\alpha}$ für z in das Integral substituirt, so entsteht

$$K' = \frac{8 r^2 (H-h)^3}{H^2} \int \frac{\alpha - \text{Sin}\,\alpha\ \text{Cos}\,\alpha}{(1+\text{Cos}\,\alpha)^4}\, d\,\text{Cos}\,\alpha$$

oder weil $1 + \text{Cos}\,\alpha = 2\ \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2$ ist

$$K' = \frac{r^2 (H-h)^3}{2 H^2} \int \frac{\alpha - \text{Sin}\,\alpha\ \text{Cos}\,\alpha}{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha^8}\, d\,\text{Cos}\,\alpha.$$

Das Integral zerlegt sich in folgende zwey Theile:

$$\text{I)} + \int \frac{\alpha\, d\,\text{Cos}\,\alpha}{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha^8}, \text{ und } 2) - \int \frac{\text{Sin}\,a\ \text{Cos}\,\alpha\ d\ \text{Cos}\,\alpha}{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha^8}.$$

Weil nun $d\,\text{Cos}\,\alpha = \alpha - \text{Sin}\,\alpha\, d$ und $\text{Sin}\,\alpha = 2$ $\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\alpha\ \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha$ ist, so wird

$$\text{I)} = -4 \int \frac{\alpha\ \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\alpha\, d\,\tfrac{1}{2}\alpha}{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha^7} = +4 \int \frac{\alpha\, d\ \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha}{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha^7}.$$

Es ist aber $d\left(\frac{\alpha}{\text{Cos}.\,\tfrac{1}{2}\alpha^6}\right) = \frac{d\,\alpha}{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha^6} -$ $\frac{6\,\alpha\, d\ \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha}{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha^7}$; also

$$\text{I)} = +\tfrac{2}{3} \int \frac{d\,\alpha}{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha^6} - \tfrac{2}{3}\,\frac{\alpha}{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha^6}$$

$$= -\tfrac{2}{3}\,\frac{\alpha}{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha^6} + \tfrac{4}{3}\int \text{Sec}\,\tfrac{1}{2}\alpha^4\ \text{Sec}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2\, d\,\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$= -\frac{3\,\alpha}{2\ \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha^6} + \tfrac{4}{3}\int \left[1 + \text{tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2\right]^2 d\,\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$= -\frac{3\,\alpha}{2\ \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha^6} + \tfrac{4}{3}\,\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{8}{9}\,\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha^3 + \tfrac{4}{15}\,\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha^5.$$

Ferner ist

$$\text{II)} = +\int \frac{\text{Sin}\,\alpha^2\ \text{Cos}\,\alpha\ d\,\alpha}{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha^8} = +4 \int \frac{\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2\ \text{Cos}\,a\, d\,\alpha}{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha^6}$$

$$= 8 \int \text{Tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2 \cdot \frac{2\ \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2 - 1}{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha^4}\, d\,\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$= 8 \int \text{Tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2 \left[2 - \text{Sec}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2\right] \text{Sec}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2\, d\,\tfrac{1}{2}\alpha$$

$= 8 \int (\text{tg} \tfrac{1}{2} \alpha^2 - \text{tg} \tfrac{1}{2} \alpha^4) \, d \, \text{tg} \tfrac{1}{2} \alpha$
$= \tfrac{8}{3} \text{tg} \tfrac{1}{2} \alpha^3 - \tfrac{8}{5} \text{tg} \tfrac{1}{2} \alpha^5.$

Demnach ist also

$$K' = \frac{r^2 (H-h)^3}{2 H^2} \left[- \frac{2 \alpha}{3 \, \text{Cos} \tfrac{1}{2} \alpha^6} + \tfrac{4}{3} \text{tg} \tfrac{1}{2} \alpha + \tfrac{32}{9} \text{tg} \tfrac{1}{2} \alpha^3 - \tfrac{4}{3} \text{tg} \tfrac{1}{2} \alpha^5 \right] + C$$

$$= \frac{r^2 (H-h)^3}{H^2} \cdot \left[- \frac{\alpha}{3 \, \text{Cos} \tfrac{1}{2} \alpha^6} + \tfrac{2}{9} \text{tg} \tfrac{1}{2} \alpha \, [3 + 8 \, \text{tg} \tfrac{1}{2} \alpha^2 - 3 \, \text{tg} \tfrac{1}{2} \alpha^4] \right] + C.$$

Weil nun $\text{Tg} \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \text{Cos} \alpha}{1 + \text{Cos} \alpha}} = \sqrt{\frac{h - x}{H - h}}$ und $\text{Cos} \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1 + \text{Cos} \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{H - h}{H - x}}$ ist, so erhält man, wenn man diese Werthe substituirt und alles gehörig reducirt

$$K' = \frac{r^2}{9 H^2} \left[-3 [H - x]^3 \, \text{Arc Cos} \frac{H - 2h + x}{H - x} + 2 (3 H^2 + 2 hH - 8 h^2 + 14 hx - 8 Hx - 3 x^2) \sqrt{(H-h)(h-x)} \right] + C.$$

Die Constans ergiebt sich, wenn man $x = 0$ und $K' = 0$ setzt; vollständig ist also

$$K' = \frac{r^2}{9 H^2} [3 H^3 \, \text{Arc Cos} \frac{H - 2h}{H} - 3 (H - x)^3 \times \text{Arc Cos} \frac{H - 2h + x}{H - x} - 2 (3 H^2 + 2 hH - 8 h^2) \times \sqrt{(H-h) h}$$
$$+ 2 [3 H^2 + 2 hH - 8 h^2 + 14 hx - 8 Hx - 3 x^2] \times \sqrt{(H-h)(h-x)}].$$

Für $x = h$ ergiebt sich

$$K = \frac{r^2}{9 H^2} \left[3 H^3 \text{ Arc Cos } \frac{H - 2h}{H} - 2(3H^2 + 2hH - 8 h^2) \sqrt{(H - h) h}\right].$$

Setzt man $r = 4$; $H = 4$; $h = 3$; so erhält man $K = 44{,}6804$.

Setzt man $H = h$; so entsteht $K = \frac{r^2}{9 H^2} 3 H^3$ Arc Cos (-1)

$$= \tfrac{1}{3} r^2 H \pi = \text{dem ganzen Kegel.}$$

Aufgabe 37.

Fig. 25. Die Wandfläche F dieses Klauen Fig. 25. zu bestimmen.

Auflösung.

Die Bezeichnung sey wie in Aufgabe 36., so ist, wenn man die veränderliche Fläche $F B E \gamma \beta \delta = F'$ setzt

$$F' = 2 \int z \,.\, \alpha\, d\, (B \beta)$$

oder wenn $x \frac{\sqrt{H^2 + r^2}}{H}$ für $B\beta$ und

$r \frac{H - x}{H}$ für z gesetzt wird

$$F' = \frac{2 r \sqrt{H^2 + r^2}}{H^2} \int (H - x) \alpha\, dx.$$

Wird hierin der Werth für x aus Aufgabe 36 substituirt, so ergiebt sich

$$F' = \frac{8 r (H - h)^2 \sqrt{H^2 + r^2}}{H^2} \int \frac{\alpha\, d \text{ Cos } \alpha}{(1 + \text{Cos } \alpha)^3}.$$

Das

Das Integral findet man auf demselben Wege wie in Aufgabe 36., und erhält

$$F' = \frac{r(H-h)^2\sqrt{H^2+r^2}}{H^2}\left[-\frac{\alpha}{\mathrm{Cos.}\,\frac{1}{2}\alpha^4} + 2\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{2}{3}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha^3\right] + C,$$

oder nach gehöriger Substitution der Werthe für α, $\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\alpha$; $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha$;

$$F' = \frac{r\sqrt{H^2+r^2}}{H^2}\left[-(H-x)^2\,\mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{H-2h+x}{H-x} + \tfrac{2}{3}(3H-2h-x)\sqrt{(H-h)(h-x)}\right] + C.$$

Für $x = 0$; wird auch $F = 0$, und man erhält die Constante. Vollständig ist demnach

$$F' = \frac{r\sqrt{H^2+r^2}}{H^2}\left[H^2\,\mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{H-2h}{H} - \tfrac{2}{3}(3H-2h)\sqrt{(H-h)h} - (H-x)^2\,\mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{H-2h+x}{H-x} + \tfrac{2}{3}(3H-2h-x)\sqrt{(H-h)(h-x)}\right].$$

Für $x = h$; ergiebt sich

$$F = \frac{r\sqrt{H^2+r^2}}{H^2}\left[H^2\,\mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{H-2h}{H} - \tfrac{2}{3}(3H-2h)\sqrt{(H-h)h}\right],$$

und ist auch $h = H$; so erhält man

$F = r\pi\sqrt{H^2+r^2} =$ dem Mantel des ganzen Kegels.

Aufgabe 38.

Es sey ABC Fig. 26. irgend eine von einem bestimmten Gesetz abhängige krumme Linie; EFDCBA ein darüber stehender prismatischer Körper; IPK eine so durch ihn gelegte Ebene, daß IK und die Achse BG der Fig. 26.

Grundfläche sich senkrecht schneiden. Es soll der Inhalt des Klauen IPBK bestimmt werden.

Auflösung.

Es sey $IL = b$; $BL = a$; und das Perpendikel von P auf die Grundfläche IBK, d. i. die Höhe des Klauen $= h$; ferner sey die Ebene MNO mit der LBP parallel; $lM = x$; $MN = y$.

Weil die Dreiecke MNO, LBP ähnlich sind, so verhält sich

$\triangle PLB : NMO = a^2 : y^2$; daher ist

$\triangle MNO = \frac{h\,y^2}{2a}$. Folglich ist der veränderliche Körper IMNO oder

$$K' = \frac{h}{2a} \int y^2\,dx,$$

wonach also, sobald eine Gleichung zwischen x und y gegeben ist, K′ bestimmt werden kann.

1) Es sey ABC eine gewöhnliche Parabel, p ihr Parameter, also $b^2 = pa$; daher $p = \frac{b^2}{a}$, folglich $NW^2 = p.BW$ oder

$$(b-x)^2 = \frac{b^2}{a}(a-y); \text{ und hieraus}$$

$$y = a - \frac{a}{b^2}(b-x)^2; \text{ also}$$

$$K' = \frac{h}{2a} \int \left[a - \frac{a}{b^2}(b-x)^2\right]^2 dx$$

$$= \left[\frac{a h x^3}{30 b^4}\left[20 b^2 - 15 bx + 3x^2\right]\right].$$

Für $x = 2b$ erhält man den ganzen Klauen IPBK $= \frac{8}{15}\, a b h =$ der Grundfläche IBK multiplicirt mit $\frac{2}{5}$ der Höhe h.

2) Es sey ABC eine Kreislinie, aber b größer oder gleich a (s. die Anmerk.); also etwa G der Mittelpunkt, so verhält sich, wenn man den Halbmesser dieses Kreises mit r bezeichnet

$$a : b = b : 2r - a; \text{ und daher ist}$$

$$r = \frac{a^2 + b^2}{2a}.$$

Setzt man nun den veränderlichen Winkel AGN $= \beta$; so ist $y = r \operatorname{Sin}\beta + a - r$; $x = b - r \operatorname{Cos}\beta$ daher

$$K' = \frac{h}{2a} \int (r \operatorname{Sin}\beta + a - r)^2\, d\,(b - r \operatorname{Cos}\beta)$$

$$= \frac{h}{2a} \cdot \begin{cases} - r^3 \int \operatorname{Sin}\beta^2\, d \operatorname{Cos}\beta \\ - 2\,(a - r)\, r^2 \int \operatorname{Sin}\beta\, d \operatorname{Cos}\beta \\ - (a - r)^2\, r \int d \operatorname{Cos}\beta. \end{cases}$$

Das erste Integral ist $= \int (1 - \operatorname{Cos}\beta^2)\, d \operatorname{Cos}\beta = \operatorname{Cos}\beta - \frac{1}{3} \operatorname{Cos}\beta^3$.

Das zweite $= - \frac{1}{2} (\beta - \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta)$.

Das dritte $= \operatorname{Cos}\beta$, also

$$K' = \frac{hr}{2a} [- r^2 \operatorname{Cos}\beta + \tfrac{1}{3} r^2 \operatorname{Cos}\beta^3 + (a - r)\, r\, [\beta - \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta] - (a - r)^2 \operatorname{Cos}\beta] + C$$

$$= \frac{hr}{2a} [- [2r^2 - 2ar + a^2] \operatorname{Cos}\beta + \tfrac{1}{3} r^2 \operatorname{Cos}\beta^3 - (r - a)\, r\, [\operatorname{Arc\,Cos}. \frac{b - x}{r} - \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta]] + C.$$

Für $x = 0$; wird $K' = 0$; $\text{Sin}\,\beta = \frac{r-a}{r}$; $\text{Cos}\,\beta = \frac{b}{r}$ und es ergiebt sich die Constans

$$= \frac{hr}{2a}\left[(2r^2 - 2ar + a^2)\frac{b}{r} - \frac{1}{3}\frac{b^3}{r} + (r-a)r\left[\text{Arc Cos}\,\frac{b}{r} - \frac{(r-a)b}{r^2}\right]\right].$$

Daher ist vollständig

$$K' = \frac{hr}{2a}\left[\frac{2r^2 - 2ar + a^2}{r}x + \frac{(b-x)^3 - b^3}{3r} + (r-a)r\left[\text{Arc Cos}\,\frac{b}{r} - \text{Arc Cos}\,\frac{b-x}{r} + \frac{(b-x)\sqrt{r^2-(b-x)^2} - b(r-a)}{r^2}\right]\right].$$

Für $x = b$; erhält man den halben Klauen; der ganze ist also

$$= \frac{h}{3a}\left[b(3r^2 - b^2) - 3r^2(r-a)\,\text{Arc Sin}\,\frac{b}{r}\right].$$

Wird $a = b = r$; so erhält man den Klauen der aus einem Cylinder so ausgeschnitten ist, daß der Schnitt den Mittelpunkt der Grundfläche trifft

$$= \tfrac{2}{3}hr^2.$$

Ist $b = 2$; $a = 1$; $h = 5$; $x = 2$; also $r = \frac{5}{2}$; so erhält man $K = 2{,}85$.

Anmerk. Ist die krumme Linie ABC eine elliptische oder Kreislinie, überhaupt eine Linie die sich schließt, so ist diese Auflösungsart nur bis zu einem Schnitt anwendbar, der nicht über den Mittelpunkt der Grundfläche hinaus geht. Denn sobald der Schnitt jenseits des Mittelpunkts fällt,

so kann der Klaue nicht mehr, als aus lauter ähnlichen Dreiecken bestehend, betrachtet werden. Deswegen sollen noch einige verschiedene Auflösungen ähnlicher Aufgaben folgen.

Aufgabe 39.

Den Klauen durch Summirung der mit der Achse des prismatischen Körpers parallelen Vierecke zu bestimmen. Fig. 27.

Auflösung.

Es sey EBV irgend eine krumme Linie, so daß EB $\cong$ BV ist; BC die Abscissen-Linie, EV senkrecht auf CB. Durch die Ebene EAV sey der Klauen EABV von einem über EBV stehenden senkrechten Prismen abgeschnitten, und durch diesen Klauen senkrecht auf die Grundfläche die Ebenen NKTD, $\alpha\beta\gamma\delta$ gelegt, so bilden diese Ebenen Rechtecke, durch deren Summirung der Aufgabe gemäß der Inhalt jedes durch eine oder zwey solche Rechtecke abgeschnittenen Stücks des Klauen bestimmt werden soll. Um die Formel allgemeiner darzustellen, soll die Gleichung für das Stück EPSH, welches durch die, auf die Grundfläche EBV senkrechte Ebene SHP, in welcher PH $\ddagger$ CB ist, vom ganzen Klauen abgeschnitten wird, aufgesucht werden.

Aus der Natur der krummen Linie EBV ergiebt sich eine Gleichung für rechtwinklichte Coordinaten auf HP, so daß das veränderliche Perpendikel RD auf HP allgemein bestimmt werden kann. Wird dann aus der

Proportion HP : PS = HR : RI der Werth für RI aufgesucht, so wird der veränderliche Körper EHRIND oder $K' = \int DR \,.\, RI \,.\, dHR$ seyn.

Es sey EBV eine Kreislinie; M ihr Mittelpunkt; ihr Halbmesser = r; EH = a; HP = b; die Höhe AB = H, so ist wie in Aufgabe 33

$$OM = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{4r^2 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}} - \frac{a}{2},$$

wofür ich n setzen will.

Dann ist also $OP = \sqrt{r^2 - n^2}$, und $HO = b - \sqrt{r^2 - n^2}$, wofür ich m schreibe.

Wird nun OR = MF mit x bezeichnet, so ist $DR = \sqrt{r^2 - x^2} - n$, ferner ergiebt sich $PS = \frac{bH}{m + r}$, wofür h gesetzt werden soll; also ist $RI = \frac{h(m + x)}{b}$.

Demnach $K' = \int (-n + \sqrt{r^2 - x^2}) \frac{h}{b} (m + x) \,.\, dx$

$$= \frac{h}{b} \cdot \begin{cases} -nmx \\ -\frac{1}{2} n x^2 \\ + \int (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} x dx \\ + m \int (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx. \end{cases}$$

Setzt man im ersten Integral $\sqrt{r^2 - x^2} = z$; also $-2xdx = 2zdz$, so wird es $= -\int z \,.\, zdz = -\frac{1}{3} z^3 = -\frac{1}{3}(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$.

Setzt man im zweiten $x = r \operatorname{Sin} \varrho$; so wird es $= m \int r^2 \operatorname{Cos} \varrho \; d \operatorname{Sin} \varrho = \frac{mr^2}{2} [\varrho + \operatorname{Sin} \varrho \operatorname{Cos} \varrho]$

$$= \frac{m r^2}{2} \left[\text{Arc Sin} \frac{x}{r} + \frac{x}{r} \cdot \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \right].$$

Daher ist

$$K' = \frac{h}{b} \left[-nmx - \tfrac{1}{2} nx^2 - \tfrac{1}{3} (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{m r^2}{2} \left[\text{Arc Sin} \frac{x}{r} + \frac{x \sqrt{r^2 - x^2}}{r^2} \right] \right] + C.$$

Für $x = -m$; wird $K' = 0$; also

$$C = \frac{h}{b} \left[-n m^2 + \tfrac{1}{2} n m^2 + \tfrac{1}{3} (r^2 - m^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{m r^2}{2} \left[\text{Arc Sin} \frac{-m}{r} - \frac{m \sqrt{r^2 - m^2}}{r^2} \right] \right].$$

Nach gehöriger Reduction ist daher weil $r \,\text{Arc Sin} \frac{x}{r} = \text{Arc } LD$ und $r \,\text{Arc Sin} \frac{-m}{r} = - \text{Arc } LE$ ist;

$$K' = \frac{h}{b} [\tfrac{1}{2} m r \,\text{Arc } ED - \tfrac{1}{2} n (m + x)^2 + \tfrac{1}{6} (m^2 + 2 r^2) \sqrt{r^2 - m^2} + \tfrac{1}{6} (3mx + 2x^2 - 2r^2) \sqrt{r^2 - x^2}].$$

Ist $a = r$; $x = r$; $b = r$; also $n = 0$ und $m = 0$; ferner $h = H$; so erhält man, wenn der gefundene Ausdruck doppelt genommen wird, den ganzen Klauen, dessen Schnitt den Mittelpunkt die Grundfläche trifft $= \frac{2}{3} h r^2$ wie in Aufgabe 38.

Ist $n = 0$; also $a = \sqrt{r^2 - m^2}$; $b = r + m$; $h = H$; so giebt die Formel, wenn diese Werthe substituirt werden, jedes Stück des Klauen von der Form **ECFGND.**

Ist $n = 0$; und $x = r$; also $m = b - r$; so giebt sie doppelt genommen, den ganzen Klauen

$= \frac{h}{3b} [3(b-r) r \text{Arc } EB + (2r^2 + m^2) \sqrt{r^2 - m^2}$

$= \frac{h}{3b} [3(b-r) r^2 \text{Arc Sin} \frac{EC}{r} + [3r^2 - EC^2]. EC]$,

welches ganz dieselbe Formel ist wie in Aufgabe 38.

Ist $m = r$; $x = r$; also $n = 0$; und $h = H$, so erhält man aus der letzten Formel

Fig. 28. $\frac{1}{2} r^2 \pi H =$ dem Körper CBA Fig. 28. oder dem halben Cylinder.

Aufgabe 40.

Den Inhalt des Klauen durch Summirung der mit der Grundfläche parallelen Ebenen zu bestimmen.

Auflösung.

Fig. 29. Es sey Fig. 29. die Abscisse $BD = a$; die rechtwinklichte Ordinate $AD = DC = b$; die Höhe $NB = h$. Man setze $BF = x$ und entwickle die mit ABL parallele Ebene HFG als Funktion von x, so hat man den zwischen den beiden parallelen Ebenen HFG und ABC liegenden Körper oder $K' = \int$ (Ebene HFG) dx.

1) Es sey ABC eine Parabel, $p = \frac{b^2}{a}$ ihr Parameter, so ist die Ebene $HFG = \frac{4}{3} HE . EF$; aber

$DB : EF = BN : FN$; folglich

$EF = \frac{a.(h-x)}{h}$; also

$HE = \sqrt{\frac{b^2}{a} . \frac{a(h-x)}{h}} = b\sqrt{\frac{h-x}{h}}$, und daher

$HFG = \frac{4}{3} ab \left(\frac{h-x}{h}\right)^{\frac{3}{2}}$. Demnach

$$K' = \frac{4\,ab}{3\,h\sqrt{h}} \int (h-x)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= -\frac{8\,ab}{15\,h\sqrt{h}}(h-x)^{\frac{5}{2}} + C$$

$$= \frac{8\,ab}{15}\left[h - \sqrt{\frac{(h-x)^5}{h^3}}\right].$$

Dies giebt, wenn $x = h$ wird, den ganzen Klauen $= \frac{8}{15}\,abh$ wie Aufgabe 38.

2) Allgemeiner läßt sich diese Aufgabe auflösen, wenn man auf eine ähnliche Art wie in Aufgabe 39. eine Formel für ein Stück wie AMLO aufsucht.

Es sey also die Ebene MOL senkrecht auf die ABC; ML ‡ DB; AM = c; also MD = b — c.

Folglich, wenn LT ‡ AC also senkrecht auf BD gezogen wird,

$LT^2 = (b-c)^2 = \frac{b^2}{a}\,BT$, daher $BT = \frac{a\,(b-c)^2}{b^2}$ und also

$$ML = a - \frac{a\,(b-c)^2}{b^2} = a\,\frac{2\,bc - c^2}{b^2}.$$

Weil sich nun ML : LO = a : h verhält, so ist

$LO = hc\,\frac{2b-c}{b^2}$, wofür n gesetzt werden soll.

Ist nun LK = BF = x; so wird

$IK = \frac{n-x}{h}\,a$, wie aus der Proportion OK : KI = NB : BD und $EF = \frac{h-x}{h}\,a$, wie aus der NF : FE = h : a folgt.

Es ist daher $HE = \sqrt{p \cdot EF} = b\sqrt{\frac{h-x}{h}}$

und also

$$HI = HE - IE = b\sqrt{\frac{h-x}{h}} - \sqrt{p.(EF - IK)}$$

$$= b\,\frac{\sqrt{h-x} - \sqrt{h-n}}{\sqrt{h}}.$$

Man bezeichne $HI = b\,\frac{\sqrt{h-x} - \sqrt{h-n}}{\sqrt{h}}$ mit u und

$IK = a\,\frac{n-x}{h}$ mit z, so ist

die Ebene $HIK = \int z\,du$. Wird aber HE mit b', und EF mit a' bezeichnet; so ist

$$(b' - u)^2 = p\,(a' - z),\ \text{also}$$

$$z = a' - \frac{1}{p}\,(b' - u)^2 = a' - \frac{a'}{b'^2}\,(b'^2 - 2b'u + u^2)$$

$$= \frac{a'}{b'^2}\,[2\,b'u - u^2] = \frac{1}{p}\,[2\,.\,b'u - u^2].$$

Daher $\int z\,du = \frac{1}{p}\int (2\,b'u - u^2)\,du$

$$= \frac{1}{p}\,[b'u^2 - \tfrac{1}{3}\,u^3]$$

$$= \frac{a}{3\,b^2}\,.\,u^2\,[3\,b\sqrt{\frac{h-x}{h}} - u]$$

oder für u den Werth substituirt

$$\int z\,du = \frac{a\,b}{3\,h\sqrt{h}}\,[2(h-x)^{\frac{3}{2}} + (3x - 2h - n)\sqrt{h-n}]$$

Demnach ist also der Körper AMLHIK oder

$$K' = \int [\int z\,du]\,dx$$

$$= \frac{a\,b}{3\,h\sqrt{h}}\int [2(h-x)^{\frac{3}{2}} + 3x\sqrt{h-n} - (2h+n)\sqrt{h-n}\,]dx$$

$= \frac{ab}{3h\sqrt{h}}[-\frac{4}{5}(h-x)^{\frac{5}{2}} + (\frac{3}{2}x^2 - 2hx - nx)\sqrt{h-n}] + C.$

Für $x = 0$; wird auch $K' = 0$; also

$C = \frac{ab}{3h\sqrt{h}}(\frac{4}{5}h^{\frac{5}{2}}) = \frac{4}{15}abh.$ Daher ist vollständig

$K' = \frac{4}{15}abh + \frac{ab}{3h\sqrt{h}}[-\frac{4}{5}(h-x)^{\frac{5}{2}} + [\frac{3}{2}x^2 - 2hx - nx)\sqrt{h-n}].$

Für $x = n$ ergiebt sich hieraus der Körper AHOLM

$= \frac{4}{15}abh + \frac{ab\sqrt{h-n}}{3h\sqrt{h}}.[-\frac{4}{5}(h-n)^2 + \frac{1}{2}n^2 - 2hn]$

$= \frac{4}{15}abh - \frac{ab\sqrt{h-n}}{30h\sqrt{h}}[8h^2 + 4hn + 3n^2]$

und für $n = h$ der halbe Klaue, oder $ADBN = \frac{4}{15}abh$.

Es ist also der zwischen den beiden Ebenen MOL, DNP liegende Körper $= \frac{ab\sqrt{h-n}}{30h\sqrt{h}}[8h^2 + 4hn + 3n^2]$.

3) Es sey ABC eine Kreislinie, so ist ihr Halbmesser $r = \frac{a^2 + b^2}{2a}$ $ML = \sqrt{r^2 - (b-c)^2} - [r-a]$; $LO = \frac{hML}{a}$, wofür wieder n gesetzt werden soll; $IK = \frac{n-x}{h}a$; $EF = \frac{h-x}{h}a$; und wenn KP ǂ HE ist; $FP = EF - IK = \frac{h-n}{h}a = d$

$KP = IE = \sqrt{2rd - d^2} = e;$

daher, wenn man die Abscisse aus dem Mittelpunkt des Kreises, von welchen HFG ein Segment ist, bis an E gemessen mit u bezeichnet; $u = r - \frac{h-x}{h} a$; also $x = h \frac{u+a-r}{a}$; $dx = \frac{h}{a} du$, folglich der halbe Kreisabschnitt $HEF = \frac{1}{2} r^2 \text{Arc Cos} \frac{u}{r} - \frac{1}{2} u \sqrt{r^2 - u^2} = A$

das Rechteck $IKPE = e \cdot \frac{n-x}{h} a = B$

und der halbe Kreisabschnitt $KPF = \frac{1}{2} r^2 \text{Arc Sin} \frac{e}{r} - \frac{1}{2} [u + \frac{n-x}{h} a] e = C$.

Daher die Ebene $HIK = A - B - C$ oder, nach Substitution und Zusammenziehung

$HIK = \frac{1}{2} r^2 \text{Arc Cos} \frac{u}{r} - \frac{1}{2} u \sqrt{r^2 - u^2} + eu + \frac{1}{2} e (a - r) - \frac{aen}{2h} - \frac{1}{2} r^2 \text{Arc Sin} \frac{e}{r}$.

Werden die drey letzten Glieder mit D bezeichnet, uud $\frac{u}{r} = \text{Cos}\, \beta$ gesetzt, so hat man

$HIK = \frac{1}{2} r^2 \beta - \frac{1}{2} r^2 \text{Sin}\, \beta \,\text{Cos}\, \beta + er \,\text{Cos}\, \beta + D$, daher den Körper AMLHIK oder $K' = \int (\text{Ebene } HIK)\, dx$ wo $dx = \frac{h}{a} du = \frac{hr}{a} d \,\text{Cos}\, \beta$ ist; man hat also

$$K' = \frac{hr}{a} \cdot \begin{cases} + \frac{1}{2} r^2 \int \beta \, d \,\text{Cos}\, \beta \\ - \frac{1}{2} r^2 \int \text{Sin}\, \beta \,\text{Cos}\, d \,\text{Cos}\, \beta \\ + er \int \text{Cos}\, \beta \, d \,\text{Cos}\, \beta \\ + D \int d \,\text{Cos}\, \beta. \end{cases}$$

Das erste Integral ist $= \frac{1}{2} r^2 \int d (\beta \,\text{Cos}\, \beta) - \text{Cos}\, \beta \, d \beta = \frac{1}{2} r^2 (\beta \,\text{Cos}\, \beta - \text{Sin}\, \beta)$.

Das zweite ist $= + \frac{1}{2} r^2 \int \sin\beta^2 \cos\beta \, d\beta = \frac{1}{2} r^2 \int \sin\beta^2 \, d \sin\beta = \frac{1}{6} r^2 \sin\beta^3$.

Das dritte $= + \frac{er}{2} \cos\beta^2$; das vierte $= D \cos\beta$, also

$$K' = \frac{hr}{a} \left[\frac{1}{2} r^2 \beta \cos\beta - \frac{1}{2} r^2 \sin\beta + \frac{1}{6} r^2 \sin\beta^3 + \frac{er}{2} \cos\beta^2 + D \cos\beta\right] + C.$$

Für $x = 0$; wird $K' = 0$; aber $u = r - a$, also $\cos\beta = \frac{r-a}{r}$; und $\sin\beta = \frac{\sqrt{2ar - a^2}}{r}$, und es ergiebt sich C.

Vollständig erhält man nach gehöriger Substitution und Reduction

$$K' = \frac{hr}{6a} \Big[3r \left[u \operatorname{Arc\,Cos} \frac{u}{r} - (r-a) \operatorname{Arc\,Cos} \frac{r-a}{r}\right] - \frac{3e}{r} \left[(r-a)^2 - u^2\right] + \frac{(3r^2 - 2ar + a^2)\sqrt{2ar - a^2} - (2r^2 + u^2 \sqrt{r^2 - u^2})}{r} - \frac{6D}{r}(r - a - u)\Big].$$

Hieraus ergiebt sich für $x = n = h$; in welchem Falle $u = r$; $d = 0$; und $e = 0$ wird; der halbe Klauen ADBN

$$= \frac{h}{6a} \left[3 r^2 (a-r) \operatorname{Arc\,Cos} \frac{r-a}{r} + (3r^2 - 2ar + a^2) \sqrt{2ar - a^2}\right],$$

welches ganz dieselbe Formel wie Aufgabe 38 und 39 ist.

Aufgabe 41.

Den Inhalt eines Klauen durch Summirung der mit der Ebene des Schnitts parallelen Ebenen zu bestimmen.

Auflösung.

Fig. 30. Man nehme Fig. 30. die Ebene CGE ‡ der ANK; so ist, wenn man BT senkrecht auf ANK nimmt, und BM $= x$ setzt; der Körper CEGB oder $K' = \int CGE \,.\, dx$.

1) Es sey ABK eine Parabel; die Abscisse BD$=a$; die rechtwinklichte Ordinate AD $= b$; also ihr Parameter $p = \frac{b^2}{a}$; so ist, wie sich leicht erweisen läßt, auch ANK eine Parabel deren Parameter $= \frac{b^2}{\sqrt{a^2+h^2}}$.

Da sich nun BT : BD$=$BN : DN verhält, so ist

$$BT = \frac{a\,h}{\sqrt{a^2+h^2}};$$ und setzt man BM $= x$;

$$FG = x\,\frac{a^2+h^2}{a\,h};$$ folglich

$$FC^2 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+h^2}} \,.\, x\,\frac{a^2+h^2}{a\,h};$$ also FC $=$

$$b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a\,h}\,x}.$$

Daher die Ebene $CGE = \frac{4}{3}\,x\,\frac{a^2+h^2}{a\,h} \,.\, b\,\frac{(a^2+h^2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{a\,h}} \,.\, \sqrt{x}$

$= \frac{4}{3}\,b \,.\, \frac{(a^2+h^2)^{\frac{5}{4}}}{(a\,h)^{\frac{3}{2}}} \,.\, x^{\frac{3}{2}}$ also der Körper CGEB oder

$$K' = \frac{4b(a^2+h^2)^{\frac{5}{4}}}{3(ah)^{\frac{3}{2}}} \int x^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{8b(a^2+h^2)^{\frac{5}{4}}}{15(ah)^{\frac{3}{2}}} \cdot x^{\frac{5}{2}}.$$ Dies giebt, wenn $x = BT$

$$= \frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$$ wird

den ganzen Klauen $= \frac{8}{15} abh$.

2) Es sey ABC eine Kreislinie, ihr Halbmesser $\frac{a^2+b^2}{2a} = r$; so ist sowohl ANK als CGE ein Stück einer und derselben Ellipse, deren großen Achse $= \frac{2r\sqrt{a^2+h^2}}{a}$ ist, wie die Proportion ND : DB = die halbe große Achse : r zeigt.

Diese große Achse soll mit 2 R bezeichnet werden; so ist wie in 1) $TB = \frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$ und $FG = \frac{a^2+h^2}{ah} x$.

Bezeichnet man nun in dieser Ellipse CGE die Abscisse von Mittelpunkt bis F mit u, so ist

$$u = R - \frac{a^2+h^2}{ah} x;$$ also $$du = -\frac{a^2+h^2}{ah} dx.$$

Es ist aber das veränderliche Flächenstück CGE, weil die kleine Achse $= 2r$ ist

$$= \frac{2r}{R} \int (R^2 - u^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-du);$$ oder $u = R \operatorname{Cos} \beta$ gesetzt

$$= -2rR \int \operatorname{Sin} \beta \, d \operatorname{Cos} \beta$$

$$= +rR\,[\beta - \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Cos} \beta] + C.$$

Die Constante wird hier $=0$; weil für $u=R$; GCE und der ganze Ausdruck $=0$ wird.

Man hat also

$$K' = rR\int(\beta - \sin\beta \cos\beta)\, dx$$

$$= \frac{ahrR^2}{a^2+h^2}\int[\beta - \sin\beta\cos\beta]\sin\beta\, d\beta$$

$$= \frac{ahrR^2}{a^2+h^2}\begin{cases} -\int\beta\, d\cos\beta = +\sin\beta - \beta\cos\beta \\ -\int\sin\beta^2\, d\sin\beta = -\tfrac{1}{3}\sin\beta^3. \end{cases}$$

Daher

$$K' = \frac{ahrR^2}{a^2+h^2}[\sin\beta - \beta\cos\beta - \tfrac{1}{3}\sin\beta^3] + C.$$

Für $x=0$; wird auch $K'=0$; aber $u=R$; also $\cos\beta = 1$; daher $\sin\beta = 0$ und $\beta = 0$; folglich auch $C=0$. Es bleibt also vollständig nach gehöriger Substitution

$$K' = \frac{ahrR}{3(a^2+h^2)}\left[\frac{2R^2+u^2}{R^2}\sqrt{R^2-u^2} - 3u \operatorname{Arc}\cos\frac{u}{R}\right].$$

Für $x = BT = \frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$; wird $u = R - \sqrt{a^2+h^2}$; und man erhält den ganzen Klauen, wenn man die Werthe setzt

$$= \frac{h}{3a}\left[(3r^2-b^2)b - 3r^2(r-a)\operatorname{Arc}\cos\frac{r-a}{a}\right]$$

wie Aufgabe 38. 39 und 40.

Auf-

Aufgabe 42.

Die sphäroidische Wandfläche des Klauen zu bestimmen.

Auflösung.

Es sey Fig. 27. CB = a; EC = b; CF = x: so ist Fig. 27

$TK = FG = \frac{h}{a} x$. Das Differential der veränderlichen Fläche F, welche von den beiden krummen Linien VK, VT, und der geraden KT begränzt wird, ist also

$$= \frac{h}{a} x d \, [\text{Arc } VT].$$

1) Es sey EBV eine Kreislinie; also ihr Halbmesser $r = \frac{a^2 + b^2}{2a}$. Setzt man nun den veränderlichen Bogen $BT = r\beta$, so hat man $F = -\frac{h}{a} r \int x d\beta$.

Es sey M der Mittelpunkt; MF = u; so ist

$$F = -\frac{h}{a} r \int (a - r + u) \, d\beta$$

$$= -\frac{hr}{a} (a - r) \text{ Arc Cos} \frac{u}{r} - \frac{h}{a} r^2 \int \text{Cos} \beta d\beta$$

$$= -\frac{hr}{a} \left[(a - r) \text{ Arc Cos} \frac{u}{r} + \sqrt{r^2 - u^2}\right] + C.$$

Für $u = -(a - r) = r - a$; wird $F = 0$; und es ergiebt sich Const.; daher hat man vollständig

$$F = \frac{hr}{a} \left[(a - r) \left[\text{Arc Cos} \frac{r - a}{r} - \text{Arc Cos} \frac{u}{r}\right] + \sqrt{r^2 - (a - r)^2} - \sqrt{r^2 - u^2}\right].$$

Für $u = r$ erhält man die Fläche VBA

$$= \frac{hr}{a} \left[(a - r) \text{ Arc Cof } \frac{r - a}{r} + b\right].$$

Ist $a = r$; so wird sie bh.

Ist $a = 2r$; so wird die CBA des halben Cylinders Fig. 28. $= \frac{1}{2} hr\pi$.

Fig. 28.

2) Es sey EBV ein Parabel; $FT = y$; so ist

$$F = \frac{h}{a} . \int ((dx)^2 + (-dy)^2)^{\frac{1}{2}} x,$$ daher, weil

$$y^2 = \frac{b^2}{a} [a - x];$$ so ist $$2ydy = - \frac{b^2}{a} dx,$$

also $$-dy = \frac{b^2 dx}{2ay};$$ daher

$$F = \frac{h}{a} \int \left[1 + \frac{b^4}{4a^2y^2}\right]^{\frac{1}{2}} xdx$$

$$= \frac{h}{a} \int \left[\frac{4a(a-x) + b^2}{4a(a-x)}\right]^{\frac{1}{2}} xdx.$$

Man setze $4a(a - x) = b^2 \text{tg}\,\beta^2$; so entsteht

$$F = - \frac{b^2h}{8a^3} \int [4a^2 - b^2 \text{tg}\,\beta^2] \text{ Sec}\,\beta\, d\,\text{tg}\,\beta$$

$$= - \frac{b^2h}{8a^3} \begin{cases} - b^2 \int \text{tg}\,\beta^2 \text{ Sec}\,\beta^3 d\beta \\ + 4a^2 \int \text{Sec}\,\beta^3 d\beta \end{cases}$$

$$= - \frac{b^2h}{8a^3} \begin{cases} + (4a^2 + b^2) \int \text{Sec}\,\beta^3 d\beta \\ - b^2 \int \text{Sec}\,\beta^5 d\beta. \end{cases}$$

Das erste Integral ist nach Aufgabe 32

$$= \frac{1}{2} \text{Sec}\,\beta \text{ tg}\,\beta + \frac{1}{4} \text{logn} \frac{1 + \text{Sin}\,\beta}{1 - \text{Sin}\,\beta},$$

und das zweite

$$= \frac{1}{4} \text{Sec}\,\beta^3 \text{ tg}\,\beta + \frac{3}{4} \int \text{Sec}\,\beta^3 d\beta$$

$= \frac{1}{4} \operatorname{Sec} \beta^3 \operatorname{tg} \beta + \frac{3}{8} \operatorname{Sec} \beta \operatorname{tg} \beta + \frac{3}{16} \operatorname{logn} \frac{1 + \operatorname{Sin} \beta}{1 - \operatorname{Sin} \beta}$

also

$$F = - \frac{b^2 h}{8 a^3} \left[[4 a^2 + \tfrac{1}{4} b^2] \left[\tfrac{1}{2} \operatorname{Sec} \beta \operatorname{tg} \beta + \tfrac{1}{4} \operatorname{logn} \frac{1 + \operatorname{Sin} \beta}{1 - \operatorname{Sin} \beta} \right] - \tfrac{1}{4} b^2 \operatorname{Sec} \beta^3 \operatorname{tg} \beta \right] + C.$$

Für $x = 0$ wird $F = 0$; aber $\operatorname{tg} \beta = \frac{2a}{b}$; also $\operatorname{Sec} \beta = \sqrt{\frac{4a^2 + b^2}{b^2}}$ und $\operatorname{Sin} \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{Sec} \beta} = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + b^2}}$ und es ergiebt sich die C.

Vollständig hat man also nach gehöriger Substitution und Reduction

$$F = \frac{b^2 h}{16 a^3} \left[\frac{16 a^2 + b^2}{4} \left[\frac{2a \sqrt{4a^2 + b^2}}{b^2} - \frac{2 \sqrt{a(a-x)} \sqrt{b^2 + 4a(a-x)}}{b^2} + \operatorname{logn} \frac{2a + \sqrt{4a^2 + b^2}}{\sqrt{b^2 + 4a(a-x)} + \sqrt{4a(a-x)}} \right] + \frac{1}{b^2} \left[[b^2 + 4a(a-x)]^{\frac{3}{2}} \sqrt{a(a-x)} - a(4a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} \right] \right].$$

Für $x = a$; giebt dieses die Fläche VBA

$$= \frac{16 a^2 + b^2}{64 a^3} b^2 h \left[\frac{2a \sqrt{4a^2 + b^2}}{b^2} + \operatorname{logn} \frac{2a + \sqrt{4a^2 + b^2}}{b} \right] - \frac{h [4a^2 + b^2]^{\frac{3}{2}}}{16 a^2},$$

welches die Constante ist, daher die Formel entgegengesetzt genommen, ohne C die Fläche AKTB angiebt.

Ist $a = 2$; $b = 3$; $h = 4$; so findet man ABV $= 9,2327$.

Aufgabe 43.

Fig. 31. Den Inhalt des Klauen AMBN Fig. 31. zu bestimmen, dessen Grundfläche AMB ein von einer Parabel schief abgeschnittenes Stück ist.

Auflösung.

Es sey wie bisher die rechtwinklichte Ordinate DA = DC = b; die Abscisse BD = a; die Höhe NB = h; ferner sey der Abstand DK = c. Man bezeichne das Perpendikel MP mit z, die Abscisse BP mit u, und die Linie KP mit w; so verhält sich $c : b = w : z$; also ist $w = \frac{cz}{b}$.

Da nun $c + w + u = a$ ist; so ist auch

1) $a - u - c = \frac{cz}{b}$, und

2) $z^2 = \frac{b^2}{a} u$.

Aus beiden Gleichungen ergiebt sich $z = \begin{cases} + \frac{a-c}{a} b, \\ - b \end{cases}$

von welchen beiden Werthen natürlich hier nur der erste anwendbar ist.

Man hat also $z = \frac{a-c}{a} b$; folglich

$u = a - c - \frac{cz}{b} = \frac{(a-c)^2}{a}$; und

$w = \frac{a-c}{a} c$.

Nun ist die Ebene AKB $=$ ADB $-$ ADK $=$ $\frac{2}{3}$ ba $-$ $\frac{1}{2}$ bc und die BKM $=$ BPM $+$ MPK $=$ $\frac{2}{3}$ uz $+$ $\frac{1}{2}$ wz, oder nach Substitution

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{(a-c)^3}{a^2} b + \frac{1}{2} \frac{(a-c)^2}{a^2} bc.$$

Daher die Ebene AMB nach gehöriger Reduction $= \frac{b}{6a^2} [8a^3 + 6ac^2 - 12ac^2 - c^3]$, wofür ich F schreiben will.

Da sich nun aus den Proportionen

$$DK : TE = BN : FN$$

$$DB : TF = BN : FN$$

$TE = \frac{c}{h} [h-x]$; $TF = \frac{a}{h} [h-x]$ ergiebt, also $HT = \sqrt{p \cdot TF} = b \sqrt{\frac{h-x}{h}}$ ist; so erhält man die Ebene HGF, wenn man in der Formel für F; $\frac{c}{h} (h-x)$ für c; $\frac{a}{h} (h-x)$ für a; und $b \sqrt{\frac{h-x}{h}}$ für b setzt; auf diesem Wege ergiebt sich $HGF = \frac{F \cdot (h-x)^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{3}{2}}}$, also der Körper zwischen den parallelen Ebenen ABM, HFG $= \frac{F}{h^{\frac{3}{2}}} \int (h-x)^{\frac{3}{2}}$ $dx = - \frac{F}{h^{\frac{3}{2}}} \int (h-x)^{\frac{3}{2}} d(h-x) = F \cdot \frac{2}{5} \cdot$ $\frac{h^{\frac{5}{2}} - (h-x)^{\frac{5}{2}}}{h^{\frac{3}{2}}}$.

Dies giebt für $x = h$; den Körper

$$AMBN = F \cdot \tfrac{2}{5} h.$$

Es ist also jeder parabolische Klaue, der Schnitt mag die Achse der Grundfläche schneiden wie er will, gleich dem Product aus der Grundfläche in $\tfrac{2}{5}$ der Höhe. (s. Aufgabe 38.)

Aufgabe 44.

Fig. 32. Die sphäroidische Oberfläche F zu bestimmen, welche der Kreisbogen DB Fig. 32. bei der Umdrehung um $\beta\gamma$ beschreibt.

Auflösung.

Es sey AB ‡ $\beta\gamma$; N der Mittelpunkt des Bogens DB; CP senkrecht auf $\beta\gamma$; DM ‡ CB; BQ ‡ CP; $NC = r$; $ON = h$; $NP = H$; $NM = u$; der zum $\angle$ DNF für den Halbmesser $= 1$ gehörige Bogen $= \beta$; so beschreibt D die Peripherie $2\pi(H + r \operatorname{Sin}\beta)$; also ist die sphäroidische Oberfläche, welche BD erzeugt, oder

$$F = 2\pi r \int [H + r \operatorname{Sin}\beta]\, d\beta$$

$$= 2\pi r \left[H \operatorname{Arc} \operatorname{Cos} \frac{u}{r} - r \operatorname{Cos}\beta\right] + C$$

$$= 2 r\pi \left[H \operatorname{Arc} \operatorname{Cos} \frac{u}{r} - u\right] + C.$$

Für $u = NQ = OB = \sqrt{r^2 - h^2}$ wird der Voraussetzung gemäß

$$F = 0;\ \text{also}\ C = 2 r\pi \left[\sqrt{r^2 - h^2} - H \operatorname{Arc} \operatorname{Cos} \frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{r}\right]$$

daher vollständig

$$F = 2r\pi\Big[H\,[\text{Arc Cos}\,\frac{u}{r} - \text{Arc Cos}\,\frac{\sqrt{r^2-h^2}}{r}] +$$
$$\sqrt{r^2-h^2} - u\Big]$$
$$= 2r\pi\,.\,TB + 2H\pi\,.\,DB.$$

Wird $H = -h$; so erhält man die Fläche, welche DB bei der Umdrehung um TB bildet

$$= 2r\pi\Big[h\,[\text{Arc Cos}\,\frac{\sqrt{r^2-h^2}}{r} - \text{Arc Cos}\,\frac{u}{r}]$$
$$- u + \sqrt{r^2-h^2}\Big]$$
$$= 2r\pi BT - 2h\pi DB.$$

Wird $H = -h$; und $u = 0$; so erhält man die Fläche, welche CB bei der Umdrehung um OB bildet

$$= 2r\pi\Big[\sqrt{r^2-h^2} - h\,\text{Arc Cos}\,\frac{h}{r}\Big]$$
$$= 2r\pi BO - 2h\pi BC.$$

Wird $H = 0$; $h = 0$; und $u = -r$; so erhält man die Oberfläche der Kugel $= 2r\pi . EF = 4r^2\pi$.

Sollte die Oberfläche einer Kuppel berechnet werden, in welcher Fig. 24. KG = 10′; FG = 12′; und der zum beschreibenden Bogen FK gehörige Halbmesser FT = KT = 22 ist; so findet man, weil hier TP = h (gleich dem a in Aufgabe 33.) = 10′8; u = 7,16; H = − 10,8 ist, die von KF bei der Umdrehung um FG erzeugte Fläche Fig. 24.

= 574,83 Quadratfuß.

Die praktische Regel zur Berechnung solcher Oberflächen wäre also der erhaltenen Formel gemäß: folgende:

Man multiplicire die Peripherie des größten Kreises mit der senkrechten Projection des beschreibenden Bogens auf die Umdrehungsachse, und subtrahire davon das Product aus der Peripherie, welche die Entfernung vom Mittelpunkt des zum Bogen gehörigen Kreises bis zur Umdrehungsachse zum Halbmesser hat, in den beschreibenden Bogen.

Sind die Umdrehungsachse und der beschreibende Bogen auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpunkts, so wird das letzte Product addirt.

Aufgabe 45.

Fig. 33. Es sey AQPE Fig. 33. eine körperliche Zone; die Ebene BDVR senkrecht auf beide Grundflächen derselben; man soll den Inhalt des abgeschnittenen Körpers ABDVRE bestimmen.

Auflösung.

Es sey T der Mittelpunkt der zugehörigen Kugel; ihr Halbmesser $= r$; der Abstand $TL = b$; der $FC = LW = a$; die veränderliche Höhe $LF = x$; $TF = b + x = y$; so ist der Halbmesser $FZ = \sqrt{r^2 - y^2}$; also

Bogen $AB = \sqrt{r^2 - y^2}$ Arc Sec $\frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{a}$.

Daher der Ausschnitt $FDAB = (r^2 - y^2)$ Arc Sec $\frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{a}$.

Weil nun das Dreieck BDF $= BC . CF = a . \sqrt{r^2 - a^2 - y^2}$ ist, so hat man den veränderlichen Kreisabschnitt BAD

$$= (r^2 - y^2) \text{ Arc Sec } \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{a} - a\sqrt{r^2 - a^2 - y^2}.$$

Daher den veränderlichen Körper ABDVRE oder

$$K = \int \left[(r^2 - y^2) \text{ Arc Sec } \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{a} - a\sqrt{r^2 - a^2 - y^2} \right] dx$$

$$= \begin{cases} 1) + \int (r^2 - y^2) \text{ Arc Sec} . \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{a} . dy \\ 2) - a \int \sqrt{r^2 - a^2 - y^2} . dy. \end{cases}$$

Schreibt man im ersten Integral $\frac{1}{3} d (3 r^2 y - y^3)$ für $(r^2 - y^2) dy$; u für $\frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{a}$; so ist

$$1) = \tfrac{1}{3} \int \text{Arc Sec } u . d [3r^2 y - y^3]$$

$$= \tfrac{1}{3} [(3 r^2 y - y^3) \text{ Arc Sec } u - \int (3r^2 y - y^3) \times d \text{ Arc Sec } u].$$

Man setze $\int (3r^2 y - y^3) d \text{ Arc Sec } u = M$; schreibe $\frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}}$ für d Arc Sec u; und substituirte aus $u = \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{a}$ den Werth für y; so ergiebt sich

$$M = \int [2 r^2 + a^2 u^2] \sqrt{\frac{r^2 - a^2 u^2}{u^2 - 1}} . \frac{du}{u}$$

$$= \begin{cases} \alpha) \; 2 r^2 \int \sqrt{\frac{r^2 - a^2 u^2}{u^2 - 1}} . \frac{du}{u}; \\ \beta) \; a^2 \int \sqrt{\frac{r^2 - a^2 u^2}{u^2 - 1}} . u du. \end{cases}$$

Setzt man nun $\frac{r^2 - a^2 u^2}{u^2 - 1} = w^2$; und entwickelt daraus sowohl $\frac{du}{u}$ als $u\,du$; so findet man

$$\alpha) = 2r^2 (a^2 - r^2) \int \frac{w^2\,dw}{(a^2 + w^2)(r^2 + w^2)}$$

$$\beta) = a^2 (a^2 - r^2) \int \frac{w^2\,dw}{(a^2 + w^2)^2}.$$

Um den Bruch $\frac{w^2}{(r^2 + w^2)(a^2 + w^2)}$ in zwei Brüche zu zerlegen, so setze man denselben $= \frac{\varrho}{r^2 + w^2} + \frac{\mu}{a^2 + w^2}$ aus welcher Gleichung

$$w^2 = \varrho a^2 + \mu r^2 + (\varrho + \mu) w^2 \text{ folgt.}$$

Die Bedingung dieser Gleichung wird erfüllt, wenn

$$\varrho a^2 + \mu r^2 = 0, \text{ und}$$

$$\varrho + \mu = 1 \text{ wird,}$$

und aus diesen beiden Gleichungen erhält man

$$\varrho = - \frac{r^2}{a^2 - r^2}$$

$$\mu = + \frac{a^2}{a^2 - r^2}; \text{ und hat also nun}$$

$$\alpha) = 2r^2 \left[a^2 \int \frac{dw}{a^2 + w^2} - r^2 \int \frac{dw}{r^2 + w^2} \right]$$

$$= 2r^2 \left[a \text{ Arc tg } \frac{w}{a} - r \text{ Arc tg } \frac{w}{r} \right], \text{ oder,}$$

durch y ausgedrückt

$$= 2r^2 \left[a \text{ Arc tg } \frac{y}{\sqrt{r^2 - a^2 - y^2}} - r \text{ Arc tg } \frac{a y}{r \sqrt{r^2 - a^2 - y^2}} \right].$$

Wird nun in β) $w^2 = a^2 \, tg \, \delta^2$ gesetzt, so entsteht

$$\beta) = a[a^2 - r^2] \int \frac{tg\delta^2 \, d \, tg \delta}{Sec \, \delta^4} = a(a^2 - r^2) \int \frac{tg \delta^2}{Sec \, \delta^2} d\delta$$

$$= a[a^2 - r^2] \int Sin \, \delta^2 \, d\delta = \tfrac{1}{2} a \, [a^2 - r^2] \, [\delta - Sin \, \delta \, Cos \, \delta]$$

$$= \tfrac{1}{2} a \, [a^2 - r^2] \, \left[Arc \, tg \frac{y}{\sqrt{r^2 - a^2 - y^2}} - \frac{y \sqrt{r^2 - a^2 - y^2}}{r^2 - a^2} \right].$$

Man hat also nun $\alpha + \beta$, oder

$$M = \tfrac{1}{2} a \, [a^2 + 3 r^2] \; Arc \, tg \frac{y}{\sqrt{r^2 - a^2 - y^2}} - 2 r^3 \; Arc \, tg \frac{a y}{r \sqrt{r^2 - a^2 - y^2}} + \tfrac{1}{2} a y \sqrt{r^2 - a^2 - y^2},$$

oder, wenn man $CB = \sqrt{r^2 - a^2 - y^2}$ mit z bezeichnet

$$M = \tfrac{1}{2} a \, [a^2 + 3 r^2] \, Arc \, tg \frac{y}{z} - 2 r^3 \, Arc \, tg \frac{a \, y}{r \, z} + \tfrac{1}{2} a y z.$$

Es ist daher, wenn man $Arc \, tg \frac{z}{a}$ für Arc Sec u schreibt

$$1) = \tfrac{1}{3} [y [3 r^2 - y^2] \, Arc \, tg \frac{z}{a} - \tfrac{1}{2} a \, (a^2 + 3 r^2) \, Arc \, tg \frac{y}{z} + 2 r^3 \, Arc \, tg \frac{a \, y}{r \, z} - \tfrac{1}{2} a y z].$$

In 2) $= - a \int \sqrt{r^2 - a^2 - y^2} \, . \, dy$ schreibe man $(r^2 - a^2) \, Cos \, \beta^2$ für y^2; so entsteht

$$2) = - a \; (r^2 - a^2) \; \int Sin \; \beta \; d \; Cos \, \beta = + a \; (r^2 - a^2) \int Sin \, \beta^2 \; d\beta$$

$$= \tfrac{1}{2} a \, (r^2 - a^2) \; [\beta - Sin \, \beta \, Cos \, \beta]$$

$$= \tfrac{1}{2} a [r^2 - a^2] \left[Arc \, Cos \frac{y}{\sqrt{r^2 - a^2}} - \frac{y z}{r^2 - a^2} \right]$$

$$= \tfrac{1}{2} a \, (r^2 - a^2) \; Arc \, tg \frac{z}{y} - \tfrac{1}{2} a y z.$$

Es ist demnach

$K = \frac{1}{3} y [3 r^2 - y^2]$ Arc tg $\frac{z}{a} - \frac{1}{6} a (a^2 + 3 r^2)$

Arc tg $\frac{y}{z} + \frac{2}{3} r^3$ Arc tg $\frac{a y}{r z} + \frac{1}{2} a (r^2 - a^2)$

Arc tg $\frac{z}{x} - \frac{2}{3} a y z + C.$

Für $x = 0$; oder $y = b$ wird der Forderung gemäß $K = 0$; und es ergiebt sich die Constans.

Vollständig hat man also z' für $RW = \sqrt{r^2 - a^2 - b^2}$ gesetzt.

$K = \frac{1}{3} y [3 r^2 - y^2]$ Arc tg $\frac{z}{a} - \frac{1}{3} b [3 r^2 - b^2]$ Arc tg $\frac{z'}{a}$

$+ \frac{1}{6} a [a^2 + 3 r^2] \left[\text{Arc tg } \frac{b}{z'} - \text{Arc tg } \frac{y}{z}\right]$

$+ \frac{2}{3} r^3 \left[\text{Arc tg } \frac{a y}{r z} - \text{Arc tg } \frac{a b}{r z'}\right]$

$+ \frac{1}{2} a [r^2 - a^2] \left[\text{Arc tg } \frac{z}{y} - \text{Arc tg } \frac{z'}{b}\right] +$

$\frac{2}{3} a [b z' - y z].$

Für $y = GI = \sqrt{r^2 - a^2}$; wird $z = 0$; und man erhält das Stück GERV eines Kugelabschnitts

$= \frac{2}{3} a b z' + \frac{2}{3} r^3$ Arc tg $\frac{r z'}{a b} - \frac{1}{3} b [3 r^2 - b^2]$

Arc tg $\frac{z'}{a} - \frac{1}{3} a (3 r^2 - a^2)$ Arc tg $\frac{z'}{b}$.

Wird $y = GI = \sqrt{r^2 - a^2}$; und $b = 0$; so ergiebt sich der halbe Kugelabschnitt GNKM

$= \frac{1}{6} \pi [2 r^3 - 3 a r^2 + a^3].$

Wird $x = y$; oder $b = 0$; so findet man den Körper ABDMNK

$= \frac{1}{3} y (3r^2 - y^2) \text{ Arc tg } \frac{z}{a} + \frac{2}{3} r^3 \text{ Arc tg } \frac{a\,y}{r\,z} -$
$\frac{1}{3} a (3r^2 - a^2) \text{ Arc tg } \frac{y}{z} - \frac{2}{3} a y z.$

Wird $a = 0$; so erhält man die halbe körperliche Zone von der Höhe $x = \frac{1}{6} \pi x [3 r^2 - 3 b^2 - 3 b x - x^2]$ oder AF mit n; und EL mit m bezeichnet, bei welcher Bezeichnung

$b = \frac{m^2 - n^2 - x^2}{2x}$ und $r^2 - b^2 = m^2$ wird,

$= \frac{1}{12} \pi x [3 m^2 + 3 n^2 + x^2].$

Wird $a = 0$; und $b = 0$; aber $y = x = r$; so ergiebt sich der vierte Theil der Kugel $= \frac{1}{3} r^3 \pi$.

Soll der Inhalt des durch vier sich innerhalb einer Kugel senkrecht schneidenden Ebenen TUMN, MNKL, IKLH, und IHUT Fig. 34. begrenzten Körpers bestimmt werden, und ist gegeben Fig. 34.
die Höhe $FG = 4'$; $CD = AB = 5'$; $MN = 11'$; $KL = 16'$; $TU = 10'$; so muß man von der ganzen körperlichen Zone $\psi \varphi \mu T'$ die beiden Abschnitte $IHUT\varphi\psi$ und $NM\mu T'KL$, welche nach der gefundenen allgemeinen Formel zu berechnen sind, subtrahiren. Man findet, aus

$\gamma D : DM = DM : 2\,\gamma O - D\gamma$ und

$\gamma B : BL = BL : 2\,.\,\gamma O - \gamma B$;

$\gamma D = 2{,}0772$; $\gamma O = 8{,}32$; also ist $BO = 2{,}2428$ und $DO = 6{,}2428$.

Eben so findet man aus

$\mu D : DM = DM : 2 . F\mu - \mu D$ und

$\mu C : CU = CU : 2 . F\mu - \mu C$;

$\mu D = 3{,}8688$; $F\mu = 5{,}8438$

also ist $FD = VO = 1{,}975$; und $VW = 3{,}025$; auch verhält sich $A'V - VO : O\gamma O = \gamma = O\gamma : A'V + VO$, woraus man $A'V = 8{,}5512$ erhält.

Ferner ergiebt sich aus der Proportion

$A'x : xT' = xT' : 2 A'V - A'x$;

$A'x = 0{,}2996$;

Daher ist $GT' = 8{,}2516$.

Eben so findet man $AH = 7{,}6771$, und

$WD' = 7{,}9982$;

und man erhält nach weitläuftiger Rechnung den verlangten Körper $= 284{,}9445$.

Aufgabe 46.

Fig. 33. Die sphäroidische Oberfläche REVDAB des Kugelschnitts Fig. 33. zu bestimmen.

Auflösung.

Bei derselben Bezeichnung wie in Aufgabe 45. ist diese Fläche oder

$F = \int \text{Arc}\, BAD . d\, \text{Arc}\, EA$

$= 2r\int(r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} . \text{Arc Cos} \frac{a}{\sqrt{r^2 - y^2}}\, d\text{Arc Sin} \frac{y}{r}$

oder $\frac{dy}{\sqrt{r^2 - y^2}}$ für d Arc Sin $\frac{y}{r}$ gesetzt,

$$F = 2r\int \text{Arc Cos} \frac{a}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy$$

$$= 2ry \text{ Arc Cos} \frac{a}{\sqrt{r^2 - y^2}} - 2r\int y \times$$

$$d \text{Arc Cos} \frac{a}{\sqrt{r^2 - y^2}}.$$

Das Integral ist $= + 2ar\int \frac{y^2 dy}{(r^2 - y^2)\sqrt{r^2 - a^2 - y^2}} =$

oder, wenn man $\frac{y}{\sqrt{r^2 - a^2 - y^2}}$ mit w bezeichnet,

$$= 2ar(r^2 - a^2)\int \frac{w^2 dw}{(1 + w^2)[r^2 + a^2 w^2]}.$$

Zerlegt man $\frac{w^2}{(1 + w^2)(r^2 + a^2 w^2)}$ wie in Aufgabe 45., in $\frac{r^2}{(r^2 - a^2)(r^2 + a^2 w^2)} - \frac{1}{(r^2 - a^2)(1 + w^2)}$, so erhält man für dasselbe

$$2r^2 \text{ Arc tg} \frac{ay}{r\sqrt{r^2 - a^2 - y^2}} - 2ar \text{ Arc tg} \frac{y}{\sqrt{r^2 - a^2 - y^2}}.$$

Also ist

$$F = 2ry \text{ Arc Cos} \frac{a}{\sqrt{r^2 - y^2}} + 2r^2 \text{ Arc tg} \frac{ay}{r\sqrt{r^2 - a^2 - y^2}}$$

$$- 2ar \text{ Arc tg} \frac{y}{\sqrt{r^2 - a^2 - y^2}} + C$$

$$= 2ry \text{ Arc tg} \frac{z}{a} + 2r^2 \text{ Arc tg} \frac{ay}{rz} - 2ar$$

$$\text{Arc tg} \frac{y}{z} + C.$$

Für $x = 0$; oder $y = b$; erhält man Constans, und dann hat man vollständig

$$F = 2r\Big[y \text{ Arc tg} \frac{z}{a} + r \text{ Arc tg} \frac{ay}{rz} - a \text{ Arc tg} \frac{y}{z}$$

$$- b \text{ Arc tg} \frac{z'}{a} - r \text{ Arc tg} \frac{ab}{rz'} + a \text{ Arc tg} \frac{b}{z'}\Big].$$

Für b = o ergiebt sich die Fläche KNMDAB

$$= 2r\left[y \operatorname{Arc} tg \frac{z}{a} + r \operatorname{Arc} tg \frac{ay}{rz} - a \operatorname{Arc} tg \frac{y}{z}\right].$$

Für b = o und $y = x = \sqrt{r^2 - a^2}$; wird z = o und man erhält die halbe Calotte

$$= r\pi [r - a].$$

Die sphäroidische Oberfläche des Körpers Fig. 34. findet man bei denselben Abmessungen, wie in Aufgabe 45. = 48,5378

Ferner ergiebt sich die Ebene	TNMU =	56,3373
"	IKLH =	81,4304
"	NMKL =	55,8744
und die Ebene	IHTU =	53,0966
Folglich ist die gesammte Oberfläche dieses Körpers	=	295,2765

Aufgabe 47.

Den körperlichen Inhalt der Gewölbsteine, der vom verstorbenen Geheimen-Rath Gilly im zweiten Theil seiner Landbaukunst angegebenen gewölbten Decke zu bestimmen.

Auflösung.

Die Construction ist nach §. 25. a. a. O. folgende:
Fig. 35, 36 und 37. Es sey das Rechteck ABCD Fig. 35. der zu überwölbende Raum. Man ziehe die Diagonalen AC, BD, und mit den Seiten die Parallel-Linien QR, IH, errichte in der Mitte QR Fig. 36. ein Perpendical TG (nach Gilly = $\frac{1}{12}$ QR); suche zu den drei Punkten QGR den

den Mittelpunkt E, beschreibe aus E den Bogen UGS, trage IH und AC aus Fig. 35. als Sehnen parallel mit QR Fig. 36. in diesen Bogen, so geben die drei Kreisabschnitte QGR, IGH, AGC die Lehrbogen für die Abmessungen QR, IH, AC Fig. 35. Hiernach müssen also die Punkte A, B, C, D, tiefer liegen als die I, H, und diese wieder tiefer als die Q, R, so daß also die Oberfläche der ganzen gewölbten Decke ein Stück einer Kugelfläche, zum Halbmesser EG Fig. 36. gehörig ist, welches durch das Rechteck ABCD Fig. 35. von derselben ausgeschnitten wird, wenn man dasselbe so in die Kugel sich gelegt denkt, daß beider Mittelpunkte zusammen fallen, und es dann parallel mit sich selbst aus der Kugel heraushebt. In Fig. 37., in welcher die Buchstaben mit denen in Fig. 35 und 36 übereinstimmen, ist diese Oberfläche AIBRCHDQA perspectivisch dargestellt.

Man denke sich dieselbe aus lauter in parallelen Kreis-Ebenen liegenden Bogen wie DHC, NKL, QGR, AIB, welche zu gleichen Sehnen aber verschiedenen Halbmessern gehören, zusammengesetzt, und von allen Punkten eines dieser Bogen, wie etwa NKL gerade Linien nach dem Mittelpunkt E der Kugel gezogen, so bilden diese ein Stück vom Mantel eines senkrechten Kegels durch zwei Seiten desselben NE, LE begrenzt. Der Inhalt dieses Mantelstücks ist daher

$\frac{1}{2}$ EK . Bogen NKL. Ist also KO die Höhe der Gewölbsteine, so ist der Flächeninhalt von NKLPOM als Stück des Mantels eines senkrechten abgekürzten Kegels, begrenzt durch zwei Seiten desselben,

$$= \frac{\text{Arc NKL} + \text{Arc MOP}}{2} . \text{KO}$$

also der Cubicinhalt K' der zwischen QGR und NKL liegenden Gewölbsteine

$$= \int \frac{\text{Arc NKL} + \text{Arc MOP}}{2} . \text{KO} . d \text{ Arc GK}.$$

Man bezeichne die Breite AB mit 2a; die Länge IH mit 2b; die Höhe GT mit h, und die Höhe der Gewölbsteine KO mit n, so ist der Halbmesser der Kugel oder $r = \frac{a^2 + h^2}{2h}$.

Das Perpendikel von K auf GE sey = x; so ist der Halbmesser zum Bogen NKL $= \sqrt{r^2 - x^2}$; folglich weil die gerade Linie von N bis L = 2a ist, so ist

$$\text{Arc NKL} = 2\sqrt{r^2 - x^2} . \text{Arc Sin} \frac{a}{\sqrt{r^2 - x^2}} \text{ und}$$

$$\text{Arc POM} = \frac{2(r-n)}{r} \sqrt{r^2 - x^2} \text{ Arc Sin} \frac{a}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Da nun ferner Arc GK $= r$ Arc Sin $\frac{x}{r}$ ist, so ist also

$$K' = \frac{n(2r-n)}{r} \int \sqrt{r^2 - x^2} \text{ Arc Sin} \frac{a}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$r\,d$ Arc Sin $\frac{x}{r}$, und man erhält wie in Aufgabe 46

$$K' = (2r - n)\, n \left[x \text{ Arc tg } \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2 - x^2}} + a \text{ Arc tg } \frac{x}{\sqrt{r^2 - a^2 - x^2}} - r \text{ Arc tg } \frac{a x}{r \sqrt{r^2 - a^2 - x^2}} \right].$$

Setzt man nun $x = b$; und zur Verkürzung $FE = \sqrt{r^2 - a^2 - b^2} = m$, und nimmt den Ausdruck doppelt; so erhält man den Cubicinhalt sämmtlicher Gewölbsteine

$$= 2\,(2r - n)\, n \left[b \text{ Arc tg } \frac{a}{m} + a \text{ Arc tg } \frac{b}{m} - r \text{ Arc tg } \frac{a b}{r m} \right].$$

Aus dieser Formel läßt sich folgende praktische Regel herleiten:

Man mache $G\alpha$ Fig. 38. gleich dem Durchmesser der zum Gewölbe gehörigen Kugel, beschreibe aus dessen Mittelpunkt E einen Halbkreis; mache $G\beta$ gleich der Höhe der Gewölbsteine, und errichte in β das Perpendikel $\beta\delta$ bis zur Peripherie; nun mache man EF Fig. 38. gleich EF Fig. 36., errichte in F das Perpendikel $F\gamma$, mache dasselbe gleich a oder TR Fig. 36., ziehe $E\gamma$; trage $E\varrho = 1$ Fuß ab, und beschreibe mit $E\varrho$ den Bogen $\varrho\mu$. Nun mache man $F\varphi = b = yH$ Fig. 36., ziehe $E\varphi$ und verlängere den Bogen $\varrho\mu$ bis p; alsdann errichte man in γ auf $F\gamma$ das Perpendikel γq, bis es die Tangente Gq in q schneidet, mache $Et = F\varphi = b$, und errichte auf GE in t das Perpendikel Fig. 38.

tw bis es Eq in w schneidet, fälle aus w auf Fγ das Perpendikel wz und ziehe Ez, so ist

$\varrho\mu = \text{Arc tg} \frac{a}{m}$; $\varrho p = \text{Arc tg} \frac{b}{m}$; $\varrho\lambda = \text{Arc tg} \frac{ab}{rm}$

$\beta\delta^2 = (2r - n) \cdot n.$

Macht man nun ferner E$\alpha' = $ F$\gamma = a$; und beschreibt die Bogen $\alpha'\beta'$; tu; so wird

$tu = b \text{ Arc tg} \frac{a}{m}$; $\alpha'\beta' = a \text{ Arc tg} \frac{b}{m}$; $G\delta' = r \text{ Arc tg} \frac{ab}{rm}$.

Addirt man also tu und $\alpha'\beta'$ und subtrahirt $G\delta'$ von der Summe, nimmt sodann den Rest doppelt, und multiplicirt diesen mit den Quadrat von $\beta\delta$, so erhält man den verlangten Inhalt der Gewölbsteine.

Es sey in einem bestimmten Fall; $a = 18$; $b = 30'$; $h = 3'$ $n = 2$; so findet man $4577\frac{1}{3}$ Cubicfuß.

Aufgabe 48.

Die Oberfläche dieses Gewölbes zu berechnen.

Auflösung.

Man findet sie wie Aufgabe 47

$$= 4r \left[b \text{ Arc tg} \frac{a}{m} + a \text{ Arc tg} \frac{b}{m} - r \text{ Arc tg} \frac{ab}{rm} \right].$$

Also ist der Cubicinhalt der Gewölbsteine reichlich gerechnet,

$= n$ mal diesem Ausdruck.

In dem speciellen Fall Aufgabe 47. erhält man hiernach $4658\frac{2}{3}$ Cubicfuß.

Aufgabe 49.

Es sey Fig. 39. DF als Durchmesser des Kreises DKFM ein Stück vom Halbmesser BC einer Kugel; senkrecht auf DKFM stehe ein Cylinder. Man soll den Mantel dieses Cylinders in der Kugel bestimmen. Fig. 39.

Auflösung.

Es sey $BC = R$; $DF = 2r$; $CF = a$; $BG = x$. Das Perpendikel $GK = y$; das Perpendikel $GP = \varrho$, und das $KT = z$; $FG = u$; Fläche $WTKF = F$; so ist $x = R - a - u$, $y = \sqrt{2ru - u^2}$; $z^2 = R^2 - x^2 - y^2$; also $z = \sqrt{2aR - a^2 + 2(R \cdot a \cdot r)u}$ oder $2aR - a^2$ mit b^2, und $2(R - a - r)$ mit c bezeichnet,

$$z = \sqrt{b^2 + cu};\ F = \int TK \,.\, d\, \mathrm{Arc}\, FK$$

$$= \int z\,[du^2 + dy^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= r\int \sqrt{\frac{b^2 + cu}{2ru - u^2}} \,.\, du$$

Dies Integral kann nur durch Reihen integrirt werden, so lange a eine wirkliche Größe ist; ist $a = 0$; d. h., fällt F in C, Fig. 40., so hat man Fig. 40.

$$F = r\int \sqrt{\frac{cu}{2ru - u^2}} \,.\, du$$

$$= r\sqrt{c} \int \frac{du}{\sqrt{2r - u}}$$

$$= -2r\sqrt{c}\,\sqrt{2r - u} + C.$$

Für $u = 0$ wird auch $F = 0$; und man erhält C. Es ist also vollständig

$F = 2r\sqrt{2(R-r)} \cdot [\sqrt{2r} - \sqrt{2r-u}]$.

Für $u = 2r$ erhält man den halben Mantel des Cylinders $= 4r\sqrt{(R-r)r}$.

Fig. 41. Fällt D in B, Fig. 41. ist also $r = \frac{1}{2}R$; so wird der halbe Mantel oder $ABC = R^2$.

Aufgabe 50.

Die Calotte des Cylinders, dessen Mantel in Aufgabe 49. dargestellt wurde, zu bestimmen.

Auflösung.

Es sey wie in Aufgabe 49. $BC = R$; $DC = 2r$; $BG = x$; $GC = u$; $GK = y$; $KT = z$; $GP = \varrho$
Fig. 40. Fig. 40., und angenommen, daß F in C Fig 39. falle, weil im entgegengesetzten Falle das Integral nur durch unendliche Reihen gefunden werden kann; so ist $x = R - u$; $y = \sqrt{2ru - u^2}$; $\varrho = \sqrt{2Ru - u^2}$; also Bogen $PT = \varrho \text{ Arc Sin } \frac{y}{\varrho}$; Bogen $PC = R \text{ Arc Sin } \frac{\varrho}{R}$, daher das Stück PTC der halben Calotte QTCBQ, oder

$$F = \int \text{Bogen } PT \,.\, d \text{ Bogen } CP$$

$$= R \int \varrho \text{ Arc Sin } \frac{y}{\varrho} \,.\, d \text{ Arc Sin } \frac{\varrho}{R}$$

$$= R \int \text{Arc Sin } \frac{y}{r} \,.\, \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{r^2 - \varrho^2}} = - R \int \text{Arc Sin } \frac{y}{\varrho} \; d\sqrt{R^2 - \varrho^2}$$

$$= - R \int \text{Arc Sin } \sqrt{\frac{2r - u}{2R - u}} \,.\, dx$$

$$= - R \left[x \text{ Arc Sin } \sqrt{\frac{2r-u}{2R-u}} - \int x \right.$$

$$\left. d \text{ Arc Sin } \sqrt{\frac{2r-u}{2R-u}} \right]$$

$$= - R [R-u] \text{ Arc tg } \sqrt{\frac{2r-u}{2(R-r)}} - \frac{1}{2}$$

$$R \sqrt{2(R-r)} \int \frac{(R-u)\, du}{(2(R-u)) \sqrt{2r-u}}.$$

Setzt man nun $\sqrt{2r-u} = v$, so ergiebt sich

$$- \tfrac{1}{2} R \sqrt{2(R-r)} \int \frac{(R-u)\, du}{(2R-u)\sqrt{2r-u}} = R \sqrt{2(R-r)}$$

$$\int \frac{R-2r+v^2}{2R-2r+v^2}\, dv.$$

$$= R \,.\, \sqrt{2(R-r)} \left\{ \begin{array}{l} + (R-2r) \int \dfrac{dv}{2R-2r+v^2} \\ + \int \dfrac{v^2\, dv}{2R-2r+v^2} \end{array} \right.$$

oder $v^2 = 2(R-r) \text{ tg } \beta^2$ gesetzt

$$= R \sqrt{2(R-r)} \,.\, \left\{ \begin{array}{l} + \dfrac{R-2r}{\sqrt{2(R-r)}} \,.\, \int \dfrac{d \text{ tg} \beta}{\text{Sec } \beta^2} \\ + \sqrt{2(R-r)} \int \dfrac{\text{tg} \beta^2\, d \text{tg} \beta}{\text{Sec } \beta^2} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} + R(R-2r) \text{ Arc tg } \sqrt{\dfrac{2r-u}{2(R-r)}} \\ + 2R(R-r) \left[- \text{Arc tg } \sqrt{\dfrac{2r-u}{2(R-r)}} + \sqrt{\dfrac{2(R-r)}{2r-u}} \right] \end{array} \right.$$

Daher nach erfolgter Zusammenziehung

$$F = R \sqrt{2(R-r)(2r-u)} - [2R-u] R.$$

$$\text{Arc tg } \sqrt{\frac{2r-u}{2(R-r)}} + C.$$

Für u = 0 wird auch F = 0; und es ergiebt sich C. Vollständig ist demnach

die Fläche PTC oder

$$F = R\sqrt{2(R-r)} \cdot [\sqrt{2r-u} - \sqrt{2r}] + 2R^2 \text{ Arc tg} \sqrt{\frac{r}{R-r}} - (2R-u)R \text{ Arc tg} \sqrt{\frac{2r-u}{2(R-r)}}.$$

Fällt D in B Fig. 41. wird also R = 2r; und zugleich auch u = 2r; so ergiebt sich hieraus die Fläche ATCN =

$$-R^2 + 2R^2 \text{ Arc tg } 1$$
$$= \tfrac{1}{2}R^2\pi - R^2.$$

Da nun der achte Theil der Oberfläche der Kugel oder AECN = $\frac{1}{2}R^2\pi$ ist, so bleibt also

die Fläche AEC = R^2.

Es ist also, wenn man die beiden letzten Resultate in Aufgabe 49 und 50. vergleicht: Fläche ABCT = Fläche AECT.

Aufgabe 51.

Fig. 40. Den Inhalt des Cylinders Fig. 40. zu bestimmen.

Auflösung.

Die Bezeichnung sey wie in Aufgabe 50., so ist der Körper PGKTC oder K′ = ∫ (Ebene PGKT) du

$$= \int [\tfrac{1}{2}\varrho^2 \text{ Arc Sin } \frac{y}{\varrho} + \tfrac{1}{2}yz]\, du$$

$$= + \tfrac{1}{2}\int yz\,du + \tfrac{1}{2}\int \varrho^2 \text{ Arc Sin } \frac{y}{\varrho}\, du$$

Das erste von beiden Integralen ist
$= + \frac{1}{2} \int \sqrt{2ru - u^2} \, . \sqrt{2(R-r)u} \, . du$
$= + \frac{1}{2} \sqrt{2(R-r)} \int u \sqrt{2r - u} \, . du$. Man setze
$2r - u = v^2$; so wird dasselbe
$= - \sqrt{2(R-r)} \int (2r - v^2) v^2 dv = - \sqrt{2(R-r)}$
$[\frac{2}{3} r v^3 - \frac{1}{5} v^5]$
$= - \frac{1}{15} \sqrt{2(R-r)} \, . [4r + 3u] [2r - u] \sqrt{2r - u}$
$= - \frac{2}{15} (R-r)(4r + 3u)(2r - u) \sqrt{\frac{2r - u}{2(R-r)}}$.

Das zweite mit p bezeichnet, so ist

$p = \frac{1}{2} \int [2Ru - u^2] \text{ Arc Sin } \sqrt{\frac{2r-u}{2R-u}} \, du$

$= \frac{1}{2} \int \text{Arc Sin } \sqrt{\frac{2r-u}{2R-u}} \, . d[Ru^2 - \frac{1}{3} u^3]$

$= \frac{1}{2} (Ru^2 - \frac{1}{3} u^3) \text{ Arc Sin } \sqrt{\frac{2r-u}{2R-u}} - \frac{1}{6}$

$\int u^2 (3R - u) \, d \text{ Arc Sin } \sqrt{\frac{2r-u}{2R-u}}$.

Das zweite Glied mit q bezeichnet, so hat man

$q = + \frac{1}{12} \sqrt{2(R-r)} \int \frac{u^2 (3R - u) du}{(2R - u) \sqrt{2r - u}}$

oder $2r - u = v^2$ gesetzt

$q = - \frac{1}{6} \sqrt{2(R-r)}$

$\int \frac{4r^2[3R - 2r] - 12r[R-r]v^2 + 3(R-2r)v^4 + v^6}{2R - 2r + v^2} \, . dv$.

Bezeichnet man nun $2(R-r)$ mit b^2 und setze
$v^2 = b^2 \operatorname{tg} \beta^2$, so entsteht

$$q = -\tfrac{1}{6}b.\left\{\begin{array}{l} +\dfrac{4r^2(3R-2r)}{b}\int\dfrac{d\,tg\,\beta}{Sec\,\beta^2} \\ -\,6\,r\,b^3\int\dfrac{tg\,\beta^2\,d\,tg\,\beta}{Sec\,\beta^2} \\ +\,3\,(R-2r)\,b^3\int\dfrac{tg\,\beta^4\,d\,tg\,\beta}{Sec\,\beta^2} \\ +\,b^5\int\dfrac{tg\,\beta^6\,d\,tg\,\beta}{Sec\,\beta^2}. \end{array}\right.$$

Es ist aber $\int\dfrac{d\,tg\,\beta}{Sec\,\beta^2} = \int\dfrac{Sec\,\beta^2\,d\,\beta}{Sec\,\beta^2} = \beta;$

$$\int\frac{tg\,\beta^2\,d\,tg\,\beta}{Sec\,\beta^2} = \int tg\,\beta^2\,d\beta = tg\,\beta - \beta;$$

$$\int\frac{tg\,\beta^4\,d\,tg\,\beta}{Sec\,\beta^2} = \int(Sec\,\beta^2 - 1)^2\,d\beta = \int Sec\,\beta^4\,d\beta -$$
$$2\int Sec\,\beta^2\,d\beta + \int d\beta$$
$$= \frac{Sec\,\beta^2\,tg\,\beta}{3} + \tfrac{2}{3}\,tg\,\beta - 2\,tg\,\beta + \beta$$
$$= \tfrac{1}{3}\,Sec\,\beta^2\,tg\,\beta - \tfrac{4}{3}\,tg\,\beta + \beta$$
$$= \tfrac{1}{3}\,tg\,\beta\,[tg\,\beta^2 - 3] + \beta = \tfrac{1}{3}\,tg\,\beta^3 - tg\,\beta + \beta;$$

$$\int\frac{tg\,\beta^6\,d\,tg\,\beta}{Sec\,\beta^2} = \int(Sec\,\beta^2 - 1)^3\,d\beta = \int Sec\,\beta^6\,d\beta -$$
$$3\int Sec\,\beta^4\,d\beta + 3\int Sec\,\beta^2\,d\beta - \int d\beta$$
$$= \frac{Sec\,\beta^4\,tg\,\beta}{5} - \tfrac{11}{5}\int Sec\,\beta^4\,d\beta + 3\,tg\,\beta - \beta$$
$$= \frac{Sec\,\beta^4\,tg\,\beta}{5} - \tfrac{11}{15}\,Sec\,\beta^2\,tg\,\beta - \tfrac{22}{15}\,tg\,\beta +$$
$$3\,tg\,\beta - \beta$$
$$= \frac{tg\,\beta}{15}\,[3\,[tg\,\beta^2 + 1]^2 - 11\,[tg\,\beta^2 + 1] + 23] - \beta$$

$= \frac{tg\,\beta}{15}[3\,tg\beta^4 - 5\,tg\beta^2 + 15] - \beta = \frac{1}{5}\,tg\beta^5 - \frac{1}{3}\,tg\beta^3 + tg\,\beta - \beta.$

Daher

$$q = -\frac{1}{6}\begin{cases} + \; 4r^2(3R - 2r)\beta \\ - \; 6rb^4[tg\beta - \beta] \\ + \; 3(R - 2r)b^4[\frac{1}{3}tg\beta^3 - tg\beta + \beta] \\ + \; b^6[\frac{1}{5}tg\beta^5 - \frac{1}{3}tg\beta^3 + tg\beta - \beta] \end{cases}$$

oder, nach gehöriger Reduction, wenn man für b seinen Werth wieder setzt

$$q = -\frac{1}{6}\begin{cases} + \; 4R^3\beta \\ - \; 4(R - r)^2(R + 2r)\,tg\beta \\ - \; \frac{4}{3}(R - r)^2(4r - R)\,tg\beta^3 \\ + \; \frac{8}{5}(R - r)^3\,tg\beta^5 \end{cases}$$

also ist, alles durch die Tg ausgedrückt

$p = \frac{1}{2}[Ru^2 - \frac{1}{3}u^3]\beta - \frac{2}{3}R^3\beta + \frac{2}{3}(R - r)^2 (R + 2r)\,tg\beta + \frac{2}{9}(R - r)^2\,(4r - R)\,tg\beta^3 - \frac{4}{15}(R - r)^3\,tg\beta^5.$

Daher

$$K' = -\frac{2}{15}(R - r)(4r + 3u)(2r - u)\sqrt{\frac{2r - u}{2(R - r)}}$$
$$- \frac{1}{6}[4R^3 + u^3 - 3Ru^2]\,\mathrm{Arc\,tg}\sqrt{\frac{2r - u}{2(R - r)}}$$
$$+ \frac{2}{3}(R - r)^2\,(R + 2r)\sqrt{\frac{2r - u}{2(R - r)}} + \frac{2}{9}(R - r)^2$$
$$(4r - R)\,\frac{2r - u}{2(R - r)}\sqrt{\frac{2r - u}{2(R - r)}}$$
$$- \frac{4}{15}(R - r)^3\,\frac{(2r - u)^2}{4(R - r)^2}\sqrt{\frac{2r - u}{2(R - r)}} + C.$$

Für $u = 0$ wird auch $K' = 0$; und man erhält C. Vollständig ergiebt sich nach gehöriger Reduction

$$K' = \frac{2}{3} R^3 \text{ Arc tg } \sqrt{\frac{r}{R-r}} - \frac{1}{6} (4 R^3 + u^3 - 3 R u^2] \text{ Arc tg } \sqrt{\frac{2r-u}{2(R-r)}} + \frac{R-r}{9} [6 R^2 + 4 R r + 3 u^2 + R u - 16 r^2 - 4 r u] \sqrt{\frac{2r-u}{2(R-r)}} - \frac{2}{9} (R-r) [3 R^2 + 2 R r - 8 r^2] \sqrt{\frac{R}{R-r}}.$$

Für $u = 2r$ erhält man den halben Cylinder

Fig. 40. GCKDQPC Fig. 40.

$$= \frac{2}{3} R^3 \text{ Arc tg } \sqrt{\frac{r}{R-r}} - \frac{2}{9} [3 R^2 + 2 R r - 8 r^2] \sqrt{r(R-r)}.$$

Setzt man $r = \frac{1}{2} R$, d. h. fällt D in B, so ergiebt

Fig. 41. sich der halbe Cylinder Fig. 41.

$$= \frac{1}{6} R^3 \pi - \frac{2}{9} R^3.$$

Da nun der achte Theil der Kugel $= \frac{1}{6} R^3 \pi$ ist; so ist also der Körper, dessen Grundfläche CSBE ist; und dessen Spitze in A liegt $= \frac{2}{9} R^3$.

Aufgabe 52.

Den Cubicinhalt eines Faßes auszumitteln.

Auflösung.

Fig. 42. α) Wenn die Krümmung KCI Fig. 42. als conchoidisch betrachtet wird.

Es sey der Halbmesser CF des größten senkrechten Querschnitts $= a$; $kn = ig = r$; die Achse $ng = l$;

man setze die Abscisse FA = BM = x; die rechtwinklichte Ordinate AB = y; und verstehe unter b eine beständige Größe, so ist allgemein für die Conchoide

$$y = \frac{b+x}{x} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $\frac{1}{2}$ l für y; r für x; so erhält man den Werth der beständigen Größe

$$b = \frac{l\,r}{2\sqrt{a^2 - r^2}} - r.$$

Wird nun der veränderliche Körper den CFMB bey der Umdrehung um FM beschreibt mit K bezeichnet, so hat man $K = \pi \int x^2 dy$

$$= -\pi \int \left[\frac{(b+x)\,x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + b\sqrt{a^2 - x^2}\,.\,dx\right]$$

$$= -\pi \left\{\begin{array}{l} + b \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ + \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ + b \int \sqrt{a^2 - x^2}\,.\,dx \end{array}\right\}$$

oder $x^2 = a^2 \operatorname{Sin} \beta^2$ gesetzt

$$K = -\pi \left\{\begin{array}{l} + a^2 b \int \operatorname{Sin} \beta^2\, d\beta \\ + a^3 \int \operatorname{Sin} \beta^3\, d\beta \\ + a^2 b \int (1 - \operatorname{Sin} \beta^2)\, d\beta \end{array}\right\}$$

$$= -\pi \left\{\begin{array}{l} + a^2 b \beta \\ + a^3 \left[- \frac{\operatorname{Sin} \beta^2 \operatorname{Cos} \beta}{3} - \frac{2}{3} \operatorname{Cos} \beta\right] \end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{3} \pi a^2 \left[a\,[\operatorname{Sin} \beta^2 + 2] \operatorname{Cos} \beta - 3 b \beta\right] + C$$

$$= \frac{1}{3} \pi a^2 \left[\frac{2a^2 + x^2}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2} - 3 b \operatorname{Arc} \operatorname{Sin} \frac{x}{a}\right] + C.$$

Für $x = a$; wird $K = 0$; also

$C = \frac{1}{3} \pi a^2\, 3 b \, . \, \frac{1}{2} \pi$, also vollständig,

weil $\frac{1}{2} \pi - \text{Arc Sin} \frac{x}{a} = \text{Arc Cos} \frac{x}{a}$ ist,

$$K = \frac{1}{3} \pi a^2 \left[\frac{2a^2 + x^2}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2} + 3 b \, \text{Arc Cos} \frac{x}{a} \right].$$

Für $x = r$; giebt das doppelte dieser Formel, wenn man zugleich für b seinen Werth setzt, den verlangten Cubicinhalt des ganzen Faßes

$$= \frac{2}{3} \pi a^2 \left[\frac{2a^2 + r^2}{a^2} \sqrt{a^2 - r^2} + 3 \left(\frac{l\, r}{2 \sqrt{a^2 - r^2}} - r \right) \text{Arc Cos} \frac{r}{a} \right].$$

Anmerk. Müller in seinem: Versuch, den Inhalt der Fäßer durch Anwendung der Muschellinie zu finden. Leipzig 1784 hat durch Reihen integrirt, und folgende Näherungsformel gefunden:

$$4 \pi \left[\frac{l r^2}{4} + \left[\frac{4}{3} a - \frac{3}{5} (a - r) + \frac{3}{56} \frac{(a - r)^2}{a} \right] (a - r) \sqrt{2 a (a - r)} \right].$$

β) Wenn die Krümmung KCI als parabolisch betrachtet wird, so daß C der Scheitel der Parabel ist.

In diesem Fall wird $DI^2 = p \, . \, DC$, also ist der Parameter $p = \frac{l^2}{4(a - r)}$; daher, wenn man CA mit x, und AB mit y bezeichnet, $y^2 = \frac{l^2}{4(a - r)} \, . \, x$.

Weil nun der Cylinder-Mantel den AB bei der Umdrehung um FG beschreibt $= 2(a - x) \pi y$ ist,

so wird also der Körper, den die Ebene ABIGF bei der Umdrehung um FG erzeugt

$$2\pi \int (a-x)\, y\, d\,(a-x)$$

$$= -2\pi\, xy\, \frac{10\,a - 6x}{15} + C \text{ seyn.}$$

Für $x = CD = a - r$; wird $y = \frac{1}{2}\, l$, und der zugehörige Körper $= r^2\, \pi\, \frac{1}{2}\, l$, daher

$$C = \tfrac{1}{2}\, \pi r^2 l + \tfrac{2}{15}\, \pi l\, (a-r)\, (2a + 3r).$$

Setzt man nun $x = o$; und nimmt das Resultat doppelt, so hat man den Cubicinhalt des ganzen Faßes

$$= \pi r^2\, l + \tfrac{4}{15}\, \pi l\, (a-r)\, (2a + 3r)$$

$$= \tfrac{1}{15}\, \pi l\, [3r^2 + 4ar + 8\, a^2].$$

γ) Wenn die Krümmung KCI als kreisförmig angesehen wird.

Bezeichnet man den Halbmesser dieses Kreises mit R, so verhält sich $a - r : \frac{1}{2}\, l = \frac{1}{2}\, l : 2R - (a-r)$; woraus man

$$R = \frac{l^2}{8\,(a-r)} + \frac{a-r}{2} \text{ erhält.}$$

Setzt man nun $R\, \text{Sin}\, \beta = AB = y$, so wird $\text{Sin}\, \beta = \frac{R}{r}$; $CA = x = R - R\, \text{Cos}\, \beta$, daher der Körper, den die Ebene FABIG bei der Umdrehung um FG beschreibt

$$= 2\pi \int (a-x)\, y\, d\,(a-x)$$

$$= 2\pi R^2 \int (a - R + R\, \text{Cos}\, \beta)\, \text{Sin}\, \beta\, d\, \text{Cos}\, \beta$$

$$= 2\pi R^2 \begin{cases} + (R-a) \int \mathrm{Sin}\,\beta^2\, d\beta \\ - R \int \mathrm{Cos}\,\beta\, \mathrm{Sin}\,\beta^2\, d\beta \end{cases}$$

$$= 2\pi R^2 \begin{cases} + \frac{(R-a)}{2} . [- \mathrm{Sin}\,\beta\, \mathrm{Cos}\,\beta + \beta] \\ - \frac{1}{3} R\, \mathrm{Sin}\,\beta^3 \end{cases}$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi R^2 \left[3 (R-a) \left[\mathrm{Arc\,Sin}\, \frac{y}{R} - \frac{y\sqrt{R^2-y^2}}{R^2}\right] - 2\frac{y^3}{R^2}\right] + C.$$

Für $y = \frac{1}{2}\,l$ wird der Inhalt des zugehörigen Körpers von DIGF beschrieben $= \frac{1}{2} r^2 \pi l$, daher

$$C = \tfrac{1}{3}\pi R^2 \left[-3 (R-a) \left[\mathrm{Arc\,Sin}\, \frac{l}{2R} - \frac{l^2\sqrt{4R^2-l^2}}{4R^2}\right] + \frac{l^3}{4R^2}\right] + \tfrac{1}{2} r^2 \pi l.$$

Daher vollständig, wenn man $y = 0$ setzt, und das Resultat doppelt nimmt, der Cubicinhalt des ganzen Faßes

$$= \tfrac{1}{6}\pi \left[l \left[l^2 + 6r^2 + 3 (R-a) \sqrt{4R^2-l^2}\right] - 12 R^2 (R-a)\, \mathrm{Arc\,Sin}\, \frac{l}{2R}\right]$$

wo $R = \frac{l^2}{8(a-r)} + \frac{a-r}{2}$ ist.

Anmerkung zu Aufgabe 52.

In folgender Tabelle sind für sechs verschiedene specielle Fälle die Resultate dieser vier Formeln, mit denen, welche in den Tafeln zur Bestimmung des Inhalts der Fäßer, die im Jahr 1804 auf Befehl Sr. Majestät des Königs von Preussen heraus kamen, enthalten sind, verglichen.

In

In der ersten Vertical-Columne sind die Resultate der Müllerschen Formel

$$4\pi\left[\frac{lr^2}{4} + \left[\frac{4}{3}a - \frac{3}{5}(a-r) + \frac{3}{56}\,\frac{(a-r)^2}{a}\right](a-r)\sqrt{2a(a-r)}\right].$$

In der zweiten die der meinigen, die Krümmung ebenfalls als conchoidisch betrachtet

$$\frac{2}{3}\pi a^2\left[\frac{2a^2+r^2}{a^2}\sqrt{a^2-r^2} + 3\left[\frac{lr}{2\sqrt{a^2-r^2}} - r\right]\text{Arc Cos}\,\frac{r}{a}\right].$$

In der dritten die bei parabolischer Krümmung

$$\frac{1}{15}\pi l\,[3r^2 + 4ar + 8a^2].$$

In der vierten die, bei kreisförmiger Krümmung

$$\frac{1}{6}\pi\left[l\,[l^2 + 6r^2 + 3(R-a)\sqrt{4R^2-l^2}] - 12R^2(R-a)\,\text{Arc Sin}\,\frac{l}{2R}\right],$$

wo $R = \frac{l^2}{8(a-r)} + \frac{a-r}{2}$ ist; und

in der fünften die, aus den angeführten Tabellen, angegeben.

Längen in Zollen.			Inhalt in rheinländischen Cubiczollen.				
l	a	r	1)	2)	3)	4)	5)
26	12	8	11960	9364	9409	9496	9286
38	14	12	20478	21165	21265	21349	21189
44	21	13	66413	47159	47247	50011	46434
48	15	14	30891	32476	32451	31914	32438
53	26	13	143659	81957	80665	83409	78153
60	25	20	105586	102369	103044	103185	102612

Aufgabe 53.

Fig. 43. Es sey ABC Fig. 43. der lothrechte Querschnitt eines Daches von der Höhe $AD = h$; und halben Tiefe $BD = DC = R$; auf der Grundfläche dieses Daches stehe ein senkrechter abgekürzter Kegel, dessen Höhe ebenfalls $= AD = h$; und dessen Halbmesser der untern Grundfläche $BD = DC = R$ sey; der Halbmesser $AE = AF$ der obern Grundfläche sey $= r$. Man soll denjenigen Theil vom Mantel dieses abgekürzten Kegels, der auf jeder Seite über das Dach herausragt, also die von den drei Kurven, GEH, GIB, HLB eingeschlossenen Fläche bestimmen.

Auflösung.

Es sey $AM = x$ die rechtwinklichte Ordinate MN, welche bis zur Dachfläche reicht $= z$; die MK welche bis zum Kegelmantel reicht $= y$. Man denke sich aus M mit MK in der Horizontal-Ebene durch MK den Bogen IKL beschrieben, und setze die Fläche GIKLHEG $= F$, so ist

$$F = \int \text{Arc } IKL \,.\, dEK.$$

Nun ist aber $\text{Arc } KL = ML \text{ Arc Cos } \frac{MN}{ML} = y \text{ Arc Cos } \frac{z}{y}$.

Daher $\text{Arc } IKL = 2y \text{ Arc Cos } \frac{z}{y}$.

Ferner verhält sich $AM : AD = EK : EB$ oder $x : h = EK : \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$; daher ist

$$dEK = \frac{\sqrt{h^2 + (R-r)^2}}{h} dx, \text{ folglich}$$

$$F = \frac{2\sqrt{h^2 + (R-r)^2}}{h} \int y \operatorname{Arc Cos} \frac{z}{y} dx.$$

Es verhält sich aber $x : z = h : R$, und

$$x : y - r = h : R - r,$$

und hieraus ergiebt sich

$$x = \frac{h(y-r)}{R-r};\ z = \frac{Rx}{h} = \frac{R(y-r)}{R-r};\ \text{daher ist}$$

$$F = \frac{2\sqrt{h^2 + (R-r)^2}}{R-r} \int y \operatorname{Arc Cos} \frac{R(y-r)}{y(R-r)} . dy$$

$$= \frac{\sqrt{h^2 + (R-r)^2}}{R-r} \int \operatorname{Arc Cos} \frac{R(y-r)}{y(R-r)} . dy^2$$

$$= \frac{\sqrt{h^2 + (R-r)^2}}{R-r} \left[y^2 \operatorname{Arc Cos} \frac{R(y-r)}{y(R-r)} - \int y^2 \right.$$

$$\left. d \operatorname{Arc Cos} \frac{R(y-r)}{y(R-r)} \right].$$

Man setze $Q = -\int y^2 \, d \operatorname{Arc Cos} \frac{R(y-r)}{y(R-r)}$, so erhält man

$$Q = + Rr \int \frac{y\,dy}{\sqrt{-(2Rr - r^2)y^2 + 2rR^2 y - R^2 r^2}} \text{ oder}$$

$$Q = + R\sqrt{r} \int \frac{y\,dy}{\sqrt{-(2R - r)y^2 + 2R^2 y - R^2 r}}.$$

Man setze $y = u + p$, und bestimme p so, daß die Größe unterm Wurzelzeichen nur u^2, aber kein u enthalte, d. h. man setze den entstehenden Coefficienten von $u = 0$; dadurch erhält man $p = \frac{R^2}{2R - r}$; und die Größe unterm Wurzelzeichen

$$= \frac{R^2 (R-r)^2}{2R-r} - (2R-r)\, u^2.$$

Das erste Glied setze man $= a$, den Coefficienten des zweiten $= b$, so hat man

$$Q = R\sqrt{r} \int \frac{(p+u)\, du}{\sqrt{a - b u^2}}.$$

Wird nun $b u^2 = a \sin \beta^2$ gesetzt, so entsteht

$$Q = R \sqrt{\frac{r}{b}} \int \left[p + \sqrt{\frac{a}{b}} \sin \beta\right] d\beta$$

$$= R \sqrt{\frac{r}{b}} \left[p\beta - \sqrt{\frac{a}{b}} \cos \beta\right]$$

$$= R \sqrt{\frac{r}{2R-r}} \left[\frac{R^2}{2R-r} \text{Arc} \sin u \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a - b u^2}{b}}\right].$$

Daher ist

$$F = \frac{\sqrt{h^2 + (R-r)^2}}{R-r} \left[y^2 \text{Arc} \cos \frac{R(y-r)}{y(R-r)} + R . \sqrt{\frac{r}{2R-r}} \left[\frac{R^2}{2R-r} \text{Arc} \sin u \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a - b u^2}{b}}\right]\right] + C.$$

Für $y = r$ wird $u = r - p$; $F = o$, und es ergiebt sich

$$C = \frac{\sqrt{h^2 + (R-r)^2}}{R-r} \left[-\tfrac{1}{2} r^2 \pi - R \sqrt{\frac{r}{2R-r}} \left[\frac{R^2}{2R-r} \text{Arc} \sin [r-p] \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a - b(r-p)^2}{b}}\right]\right].$$

Man hat also F vollständig gleich der Summe der beiden letzten Ausdrücke.

Wird $y = R$, so giebt diese Summe die Fläche GIBLHEG nach gehöriger Substitution und Reduction

$$= \frac{\sqrt{h^2 + (R-r)^2}}{R-r} \left[\frac{R^3}{2R-r} \sqrt{\frac{r}{2R-r}} \operatorname{Arc Cos} \frac{r-R}{R} + \frac{Rr(R-r)}{2R-r} - \frac{1}{2} r^2 \pi \right].$$

Für $R = 0$ muß diese Formel den halben Mantel des vollkommenen Kegels geben, dessen Halbmesser der Grundfläche $= r$, und dessen Höhe $= h$ ist; sie giebt auch

$$\frac{\sqrt{h^2 + (-r)^2}}{-r} \cdot \left[- \frac{1}{2} r^2 \pi \right] = \frac{1}{2} r \pi \sqrt{h^2 + r^2};$$

Ist $R = 5{,}903$; $r = 4{,}776$; $h = 1{,}073$, wie auf dem hiesigen neuen Münzgebäude, so erhält man das

erste Glied in der Klammer	= 45,512
das zweyte . . .	= 4,519
das dritte . . .	= 35, 83
und also die Fläche . . .	= 15, 46.

Aufgabe 53.

Es sey alles wie in Aufgabe 53., nur mit dem Unterschiede, daß die aus dem Dach heraustretende Kuppel eine Kugelzone sey, Fig. 44. Man soll die Fläche MGDKPAM = F bestimmen. Fig. 44.

Auflösung.

Fig. 45. In dem lothrechten Querschnitt Fig. 45., in welchem die bezeichnenden Buchstaben mit denen in Fig. 44. übereinstimmen, sey T der Mittelpunkt der Kugel; ihr Halbmesser T F $= \varrho$; der Abstand TE $= b$; die Höhe BE $= h$; der obere Halbmesser BC $= r$; der untere EF $= R$; die Ergänzungshöhe BU $= a$; so ist, wenn R, r und h gegeben sind,

$\varrho^2 = R^2 + b^2$ und auch $\varrho^2 = r^2 + (b+h)^2$, aus welchen beiden Gleichungen $b = \frac{R^2 - r^2 - h^2}{2h}$; also

$\varrho = \sqrt{R^2 + \frac{(R^2 - r^2 - h^2)^2}{4h^2}}$ folgt, so daß also auch $a = \varrho - b - h$ bekannt ist.

Bezeichnet man nun die Abscisse BN mit x, die rechtwinklichte Ordinate NL mit z; die NI mit y; so ist

$$z = \frac{Rx}{h}; \text{ und } y^2 = \varrho^2 - (b + h - x)^2$$

$$= \varrho^2 - (b + h)^2 + 2(b + h)x - x^2$$

$$= r^2 + 2(b + h)x - x^2; \text{ oder}$$

TB $= b + h$ mit e bezeichnet

$$y^2 = r^2 + 2ex - x^2.$$

Beschreibt man nun aus N mit NI $= y$ den horizontalen Bogen GIK, und setzt die veränderliche Fläche MGIKPAM $= F'$, so ist

$$F' = \int \text{Arc GIK} \cdot d\,\text{Arc AI}.$$

Da aber nun Arc GIK = 2 Arc IK = 2 y Arc Cos $\frac{z}{y}$ und d Arc AI = d Arc UI = ϱ d Arc Sin $\frac{y}{\varrho}$ ist; so hat man also

$$F' = 2\,\varrho \int y \text{ Arc Cos } \frac{z}{y} \text{ d Arc Sin } \frac{y}{\varrho}$$

$$= 2\,\varrho \int \text{Arc Cos } \frac{z}{y} \cdot \frac{y\,dy}{\sqrt{\varrho^2 - y^2}}$$

$$= -2\,\varrho \int \text{Arc Cos } \frac{z}{y} \cdot d\,(\varrho^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -2\,\varrho \left[\sqrt{\varrho^2 - y^2} \text{ Arc Cos } \frac{z}{y} - \int (\varrho^2 \cdot y^2)^{\frac{1}{2}} \text{ d Arc Cos } \frac{z}{y}\right]$$

$$= -2\,\varrho\,(e - x) \text{ Arc Cos } \frac{R\,x}{h\sqrt{r^2 + 2\,e\,x - x^2}} + 2\,\varrho \int (e - x) \text{ d Arc Cos } \frac{z}{y}.$$

Man bezeichne + $2\,\varrho \int (e - x)$ d Arc Cos $\frac{z}{y}$ mit N', so hat man

$$N' = -2\,\varrho \int (e - x) \frac{y\,dz - z\,dy}{y\sqrt{y^2 - z^2}}$$

$$= -2\,\varrho \int \frac{e - x}{\sqrt{y^2 - z^2}} \left[dz - z \cdot \frac{dy}{y}\right]$$

$$= -2\,\varrho\,\frac{R}{h} \int \frac{e - x}{\sqrt{r^2 + 2ex - \frac{R^2 + h^2}{h^2} x^2}} \cdot \frac{r^2 + ex}{r^2 + 2ex \cdot x^2}\,dx.$$

Man setze x = u + p, und bestimme p so, daß unterm Wurzelzeichen kein u, nur u^2 entstehe. Es ergiebt sich

$$p = \frac{e\,h^2}{R^2 + h^2}, \text{ und dann}$$

$$N' = -2\varrho \frac{R}{h} \int \frac{e-p-u}{\sqrt{r^2 + \frac{h^2 e^2}{R^2+h^2} - \frac{R^2+h^2}{h^2} u^2}} \times$$

$$\frac{r^2+ep+eu}{r^2+2ep-p^2+2(e-p)u-u^2} du.$$

Zur Abkürzung setze man $\frac{2\varrho R}{h} = C$; $e-p=D$;

$r^2 + \frac{h^2 e^2}{R^2+h^2} = A^2$; $\frac{R^2+h^2}{h^2} = B^2$; $r^2+ep=E$;

$r^2+2ep-p^2=G$; so hat man

$$N' = -C \int \frac{D-u}{\sqrt{A^2-B^2u^2}} \cdot \frac{E+eu}{G+2Du-u^2} du.$$

Man setze nun $\sqrt{\frac{A-Bu}{A+Bu}} = w$; so wird

$u = \frac{A}{B} \cdot \frac{1-w^2}{1+w^2}$; $\sqrt{A^2-B^2u^2} = \frac{2Aw}{1+w^2}$; du

$= -\frac{4A}{B} \cdot \frac{wdw}{(1+w^2)^2}$,

und es ergiebt sich, wenn man

$DB-A$ mit L; $DB+A$ mit N; $EB+Ae$ mit M; $EB-Ae$ mit P; $GB^2+2ABD-A^2$ mit Q; $2(GB^2+A^2)$ mit S; und $GB^2-2ABD-A^2$ mit T bezeichnet

$$N' = +\frac{2C}{B} \int \frac{L+Nw^2}{1+w^2} \cdot \frac{M+Pw^2}{Q+Sw^2+Tw^4} \cdot dw.$$

Man setze

$$\frac{L+Nw}{1+w^2} \cdot \frac{M+Pw^2}{Q+Sw^2+Tw^4} = \frac{\mathfrak{A}}{1+w^2} + \frac{\mathfrak{B}w^2+\mathfrak{D}}{Q+Sw^2+Tw^4}$$

so findet man

$$\mathfrak{A} = \frac{(N-L)(M-P)}{S-T-Q}$$

$$\mathfrak{B} = NP - T\mathfrak{A}$$

$\mathfrak{D} = LM - Q\mathfrak{A}$, und also

$$N' = \frac{2C}{B}\left[\mathfrak{A}\int\frac{dw}{1+w^2} + \mathfrak{D}\int\frac{dw}{Q+Sw^2+Tw^4} + \mathfrak{B}\int\frac{w^2\,dw}{Q+Sw^2+Tw^4}\right].$$

Das erste dieser drey Integrale ist $= \mathfrak{A}$ Arc tg w.

Den Nenner $Q + Sw^2 + Tw^4$ zerlege man nach der Auflösungsart der unreinen quadratischen Gleichungen in die Factoren

$$T\left[\frac{S+\sqrt{S^2-4QT}}{2T}+w^2\right].\left[\frac{S-\sqrt{S^2-4QT}}{2T}+w^2\right]$$

und setze $\frac{S+\sqrt{S^2-4QT}}{2T} = c$; $\frac{S-\sqrt{S^2-4QT}}{2T} = m$; so erhält man das zweite Integral in der Klammer $= \frac{\mathfrak{D}}{T}\int\frac{1}{(c+w^2)(m+w^2)}\,dw$; das dritte $= \frac{\mathfrak{B}}{T}\int\frac{1}{(c+w^2)(m+w^2)}\,w^2\,dw$.

Den Bruch $\frac{1}{(c+w^2)(m+w^2)}$ zerlege man in $\frac{1}{(c-m)(m+w^2)} - \frac{1}{(c-m)(c+w^2)}$; so wird das zweite $= \frac{\mathfrak{D}}{(c-m)T}\left[\int\frac{dw}{m+w^2} - \int\frac{dw}{c+w^2}\right]$

$$= \frac{\mathfrak{D}}{(c-m)T}\left[\frac{1}{\sqrt{m}}\text{Arc tg}\frac{w}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\text{Arc tg}\frac{w}{\sqrt{c}}\right]$$

und

das dritte $= \frac{\mathfrak{B}}{(c-m)T}\left[\int\frac{w^2\,dw}{m+w^2} - \int\frac{w^2\,dw}{c+w^2}\right]$

$= \frac{\mathfrak{B}}{(c-m)T}\left[\sqrt{m}\left[\frac{w}{\sqrt{m}} - \text{Arc tg}\,\frac{w}{\sqrt{m}}\right] - \sqrt{c}\left[\frac{w}{\sqrt{c}} - \text{Arc tg}\,\frac{w}{\sqrt{c}}\right]\right]$

$= \frac{\mathfrak{B}}{(c-m)T}\left[\sqrt{c}\,\text{Arc tg}\,\frac{w}{\sqrt{c}} - \sqrt{m}\,\text{Arc tg}\,\frac{w}{\sqrt{m}}\right].$

Daher ist

$$N' = \frac{2C}{B}\left[\mathfrak{A}\,\text{Arc tg}\,w + \frac{\mathfrak{D}-\mathfrak{B}m}{T(c-m)\sqrt{m}}\,\text{Arc tg}\,\frac{w}{\sqrt{m}} - \frac{\mathfrak{D}-\mathfrak{B}c}{T(c-m)\sqrt{c}}\,\text{Arc tg}\,\frac{w}{\sqrt{c}}\right],$$

folglich

$$F' = -2\varrho\,[e-x]\,\text{Arc Cos}\,\frac{z}{y} + N' + C.$$

Für $x = 0$; wird auch $z = 0$ und $y = r$; also $u = -p$; $w = \sqrt{\frac{A+Bp}{A-Bp}} = w'$ aber $F' = 0$; und es ergiebt sich Constante.

Für $x = h$; wird $y = z = R$; also $u = h - p$; $w = \sqrt{\frac{A-B(h-p)}{A+B(h-p)}} = w''$; und man erhält, wenn $\frac{\mathfrak{D}-\mathfrak{B}m}{T(c-m)\sqrt{m}}$ mit q und $\frac{\mathfrak{D}-\mathfrak{B}c}{T(c-m)\sqrt{c}}$ mit φ bezeichnet wird,

$$F = 2\varrho e.\tfrac{1}{2}\pi - \frac{2C}{B}\left[\mathfrak{A}\,[\text{Arc tg}\,w' - \text{Arc tg}\,w''] + q\left[\text{Arc tg}\,\frac{w'}{\sqrt{m}} - \text{Arc tg}\,\frac{w''}{\sqrt{m}}\right] - \varphi\left[\text{Arc tg}\,\frac{w'}{\sqrt{c}} - \text{Arc tg}\,\frac{w''}{\sqrt{c}}\right]\right]$$

Man findet, daß $w' = \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{r}$ und $w'' = o$ ist, also hat man auch

$$F = \pi \varrho e - \frac{2C}{B} \left[\mathfrak{A} \text{ Arc tg } \frac{\sqrt{R^2+h^2}}{r} + q \text{ Arc tg } \frac{\sqrt{R^2+h^2}}{r \sqrt{m}} - \varphi \text{ Arc tg } \frac{\sqrt{R^2+h^2}}{r \sqrt{c}}\right].$$

Durch mühsame Substitution ergiebt sich, daß $q = \varphi = - \frac{1}{2} \varrho \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{R}$ ist; und wenn man die Formel $\text{Arc tg } \frac{x-y}{1+xy} = \text{Arc tg } x - \text{Arc tg } y$ anwendet, so entsteht

$$F = \pi \varrho e - \frac{2C}{B} \left[\mathfrak{A} \text{ Arc tg } \frac{\sqrt{R^2+h^2}}{r} \cdot \frac{1}{2} \varrho \frac{\sqrt{R^2+h^2}}{R} \text{ Arc tg } \left(r \sqrt{R^2+h^2} \cdot \frac{\sqrt{c} - \sqrt{m}}{r^2 \sqrt{cm} + R^2 + h^2}\right)\right].$$

Auf sehr beschwerlichen Wegen findet man

$$\sqrt{cm} = \frac{R^2 + h^2}{r^2}; \sqrt{c} - \sqrt{m} = \sqrt{c + m \cdot 2\sqrt{cm}}$$

$$= \sqrt{(R^2 + h^2) \frac{(R^2 + h^2)^2 + r^2 (2h^2 + r^2 - 2R^2)}{Rr}}$$

$$\frac{2C}{B} = \frac{4R\varrho}{\sqrt{R^2 + h^2}};$$

$$\mathfrak{A} = \frac{R^2 + h^2 - r^2}{2h} = e;$$

also ist vollständig

$$F = \pi \varrho e - \frac{4 R \varrho}{\sqrt{R^2 + h^2}} \left[e \text{ Arc tg } \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{r} - \right.$$

$$\left. \tfrac{1}{2} \varrho \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{R} \text{ Arc tg} \sqrt{\frac{(R^2 + h^2)^2 + r^2(2h^2 + r^2 - 2R^2)}{4 R^2 r^2}} \right]$$

wo $e = \frac{R^2 + h^2 - r^2}{2h}$, und

$$\varrho = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R^2 - r^2 - h^2}{2h}\right)^2} \text{ ist.}$$

Für $b = 0$; also $\varrho = R$; wird $e = h$; und $r^2 = R^2 - h^2$, also

$$F = \pi R h - \frac{4 R^2}{\sqrt{R^2 + h^2}} \left[h \text{ Arc tg} \sqrt{\frac{R^2 + h^2}{R^2 - h^2}} - \right.$$

$$\left. \tfrac{1}{2} \sqrt{R^2 + h^2} \text{ Arc tg} \sqrt{\frac{h^2}{R^2 - h^2}} \right].$$

Wird auch $h = R$; so findet man

$$F = (1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}})\, 2 R^2 \pi.$$

Ist $r = 108''$; $R = 130''$; $h = 23''$ wie auf dem hiesigen neuen Münzgebäude, so findet man

$F = 7307,5$ Quadratzolle.

Verzeichniß der Druckfehler.

Seite 3 Zeile 3 v. o. $\sqrt[3]{\frac{4a}{\pi}}$ für $\sqrt[3]{\frac{4a}{\pi}}$

— 7 — 5 v. o. $1:\sqrt{2}$ für $1:\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$

— 12 — 13 v. u. $R-r$ für $-(R-r)$

— — — 1 v. u. $+3\frac{h^2R^2}{(R-r)^2}x-$ für $3\frac{h^2R^2}{(R-r)^2}x-$

— 17 — 10 v. o. im Nenner $4\sqrt{\frac{3K}{\pi h}-\frac{3}{4}z^2}$ für $\sqrt[4]{\frac{3K}{\pi h}-\frac{3}{4}z^2}$

— 20 — 7 v. o. $\frac{\pi h^3-12Q}{\pi h^3}$ für $\frac{\pi h^3-12Qh}{\pi h^3}$

— 23 — 11 v. u. im Zähler $[3h\pm\sqrt{h^2-8r^2}]$ für $[3h\pm\sqrt{h^2-8r^2}$

— 25 — 3 v. o. im Zähler $[m-\pi x^2]$ für $[m-\pi x^2$

— — — 9 v. u. $\sqrt[3]{\frac{24Q}{\pi}}$ für $\sqrt[6]{\frac{576Q^2}{\pi^2}}$

— 32 — 3 v. o. $\frac{1}{2}mH^2$ für $\frac{1}{2}mH$

— 46 — 9 v. o. $\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$ für $\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{5}}$

— 47 — 3 v. o. Ebene; CD für Ebene CD

— 58 — 1 v. o. $+\frac{c}{a^2}\sqrt{a^2-c^2}]$ für $+\frac{c}{a^2}\sqrt{a^2-c^2}$

— 59 — 6 v. u. $-\frac{a^2}{c^2}y^2$ für $\frac{a}{c^2y^2}$

— 62 — 6 v. o. $-\text{Sin}\,\alpha\, d\alpha$ für $\alpha-\text{Sin}\,\alpha\, d$

Seite 62 Zeile 5 und 6 v. u. $\frac{2\alpha}{3\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\,\alpha^6}$ für $\frac{3\alpha}{2\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\,\alpha^6}$

— 66 — 1 v. u. ist die Klammer unnöthig

— 67 — 10 v. o. muß heißen:

Setzt man nun den zum veränderlichen Winkel AGN gehörigen Bogen für den Halbmesser i

— 72 — 1 v. o. fehlt am Ende eine Klammer

— — — 10 v. u. ABC für ABL

— 73 — 8 v. u. $\frac{a\,(b-c)^2}{b^2}$ für $\frac{a\,(b-c}{b^2}$

— 75 — 5 v. u. $\frac{a^2+b^2}{2a}$; ML für $\frac{a^2+b^2}{2a}$ ML

— 76 — 5 v. u. $\mathrm{Cos}\,\beta\, d\,\mathrm{Cos}\,\beta$ für $\mathrm{Cos}\, d\,\mathrm{Cos}\,\beta$

— 77 — 8. v. u. im Zähler $(2r^2+u^2)$ für $(2r^2+u^2$

— 80 — 2 v. u. $\frac{r-a}{r}$ für $\frac{r-a}{a}$

— 89 — 5 v. u. substituire für substituirte

— 92 — 4. v. o. Arc tg $\frac{z}{y}$ für Arc tg $\frac{z}{x}$

— 94 — 6 v. o. $:O\gamma = O\gamma:$ für $:O\gamma O = \gamma - O\gamma:$

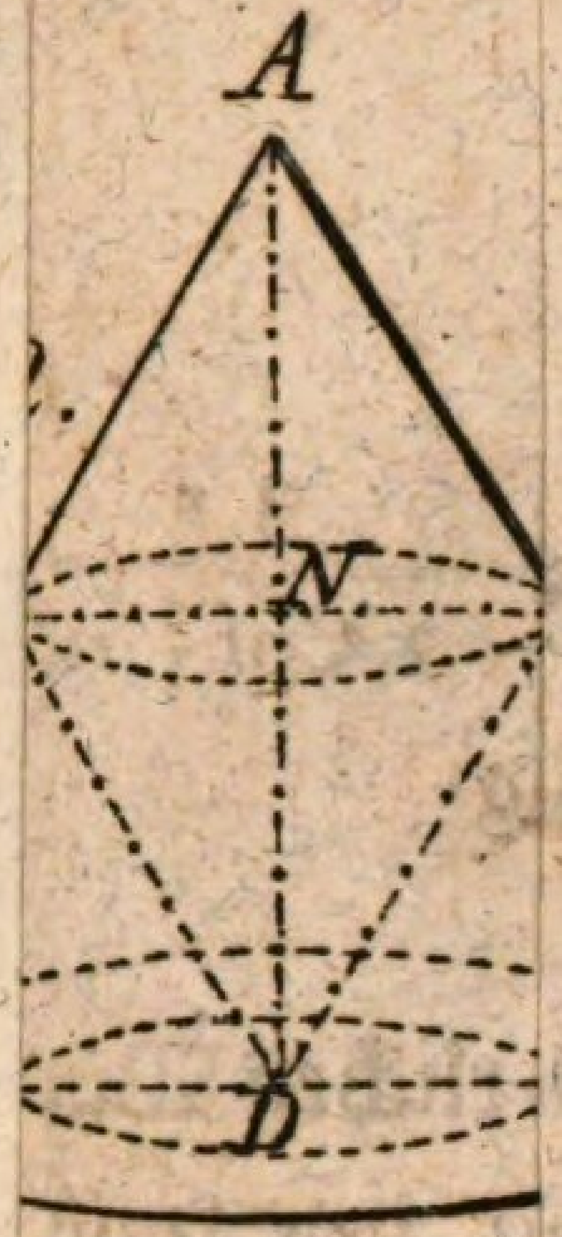
— 102 — 6. v. u. QTCPQ für QTCBQ

— 103 — 4 v. u. $\sqrt{\frac{2r-u}{2(R-r)}}$ für $\sqrt{\frac{2(R-r)}{2r-u}}$

— 107 — 6 v. o. $+\beta]$ für $+\beta$

— 108 — 6 v. o. $\sqrt{\frac{r}{R-r}}$ für $\sqrt{\frac{R}{R-r}}$

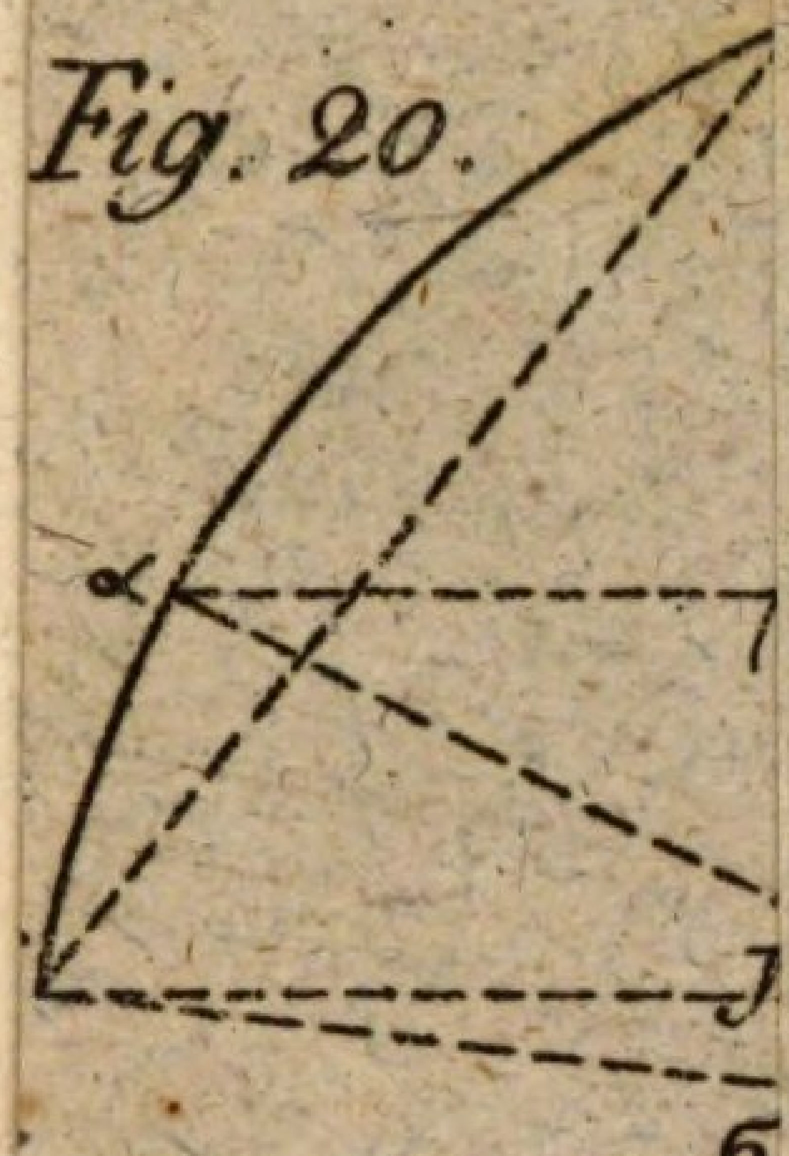
— 111 — 5 v. u. $\frac{y}{R}$ für $\frac{R}{r}$

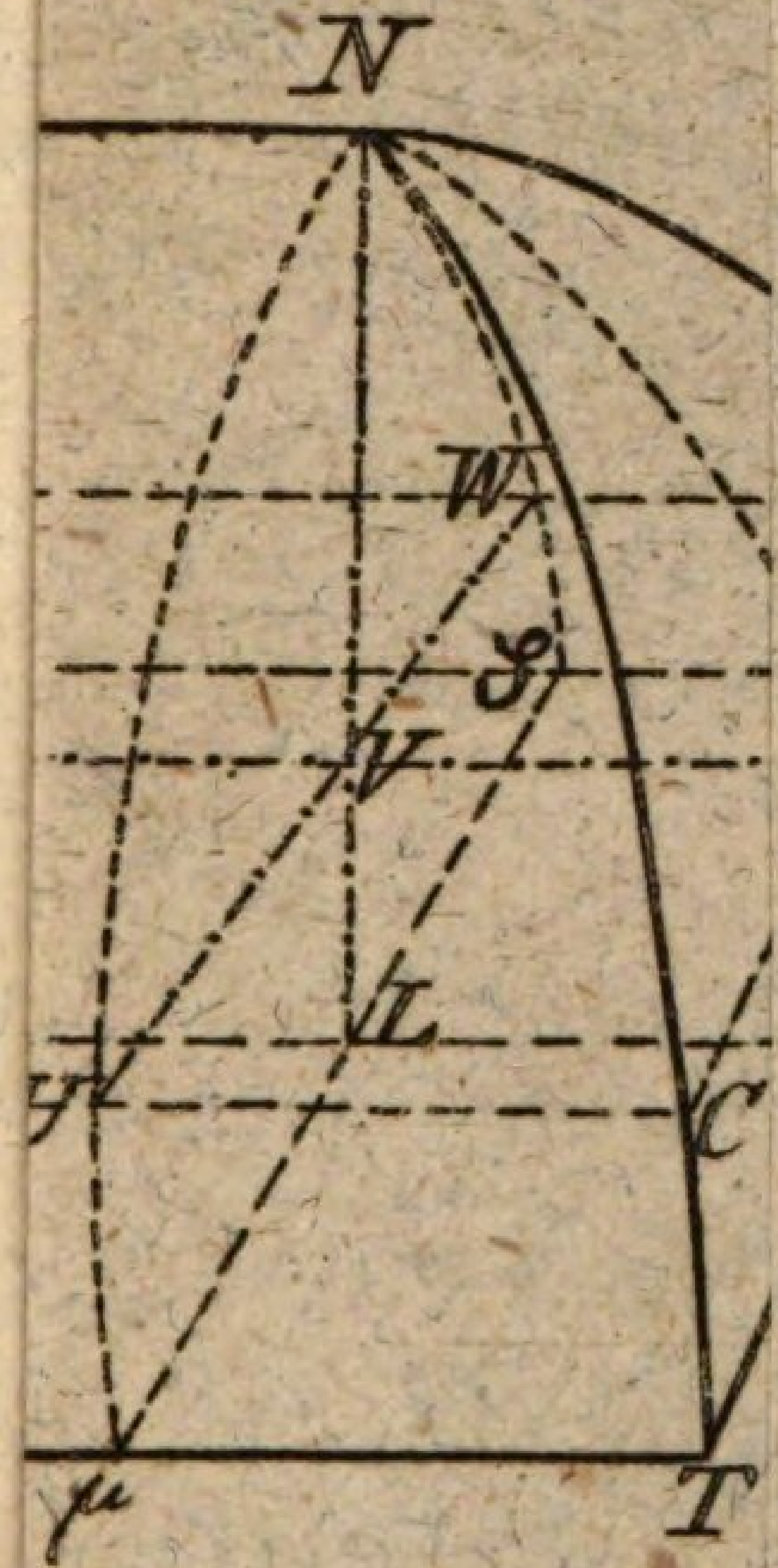


Fi

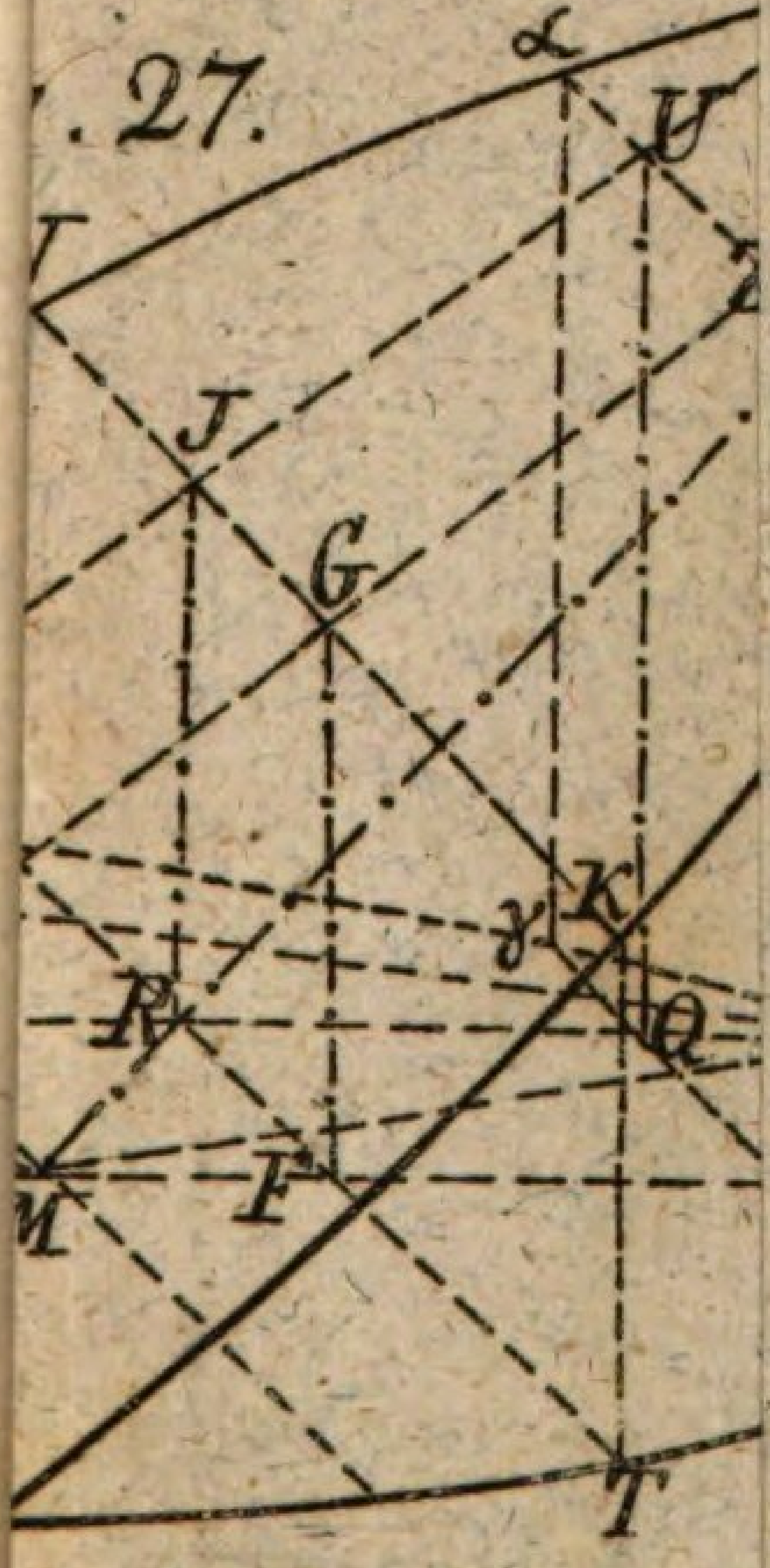
A
A
G
F

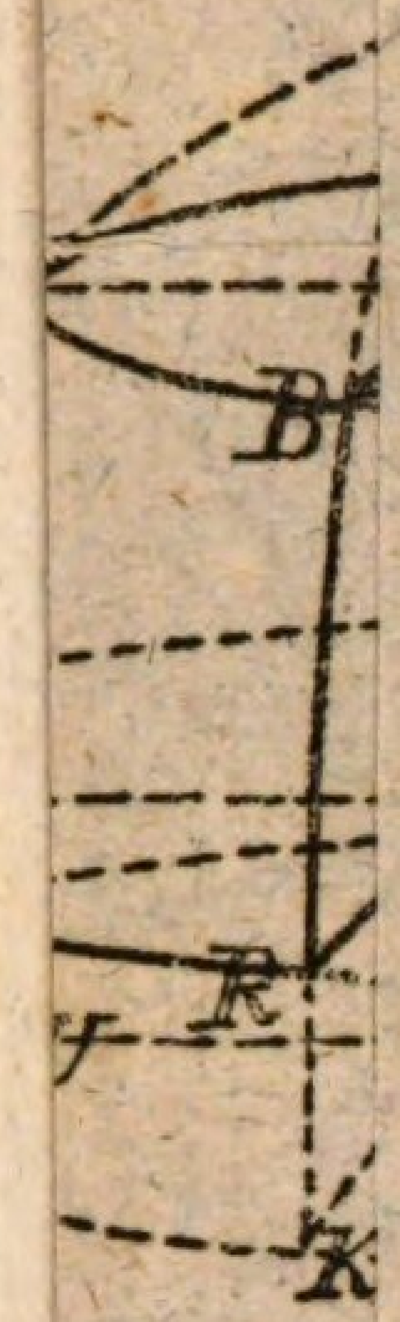
Fig. 20.



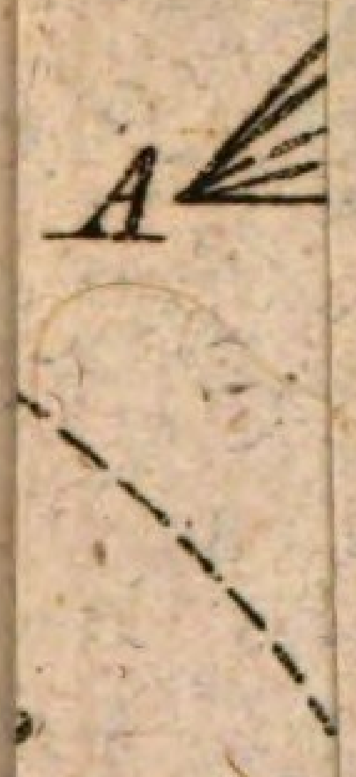


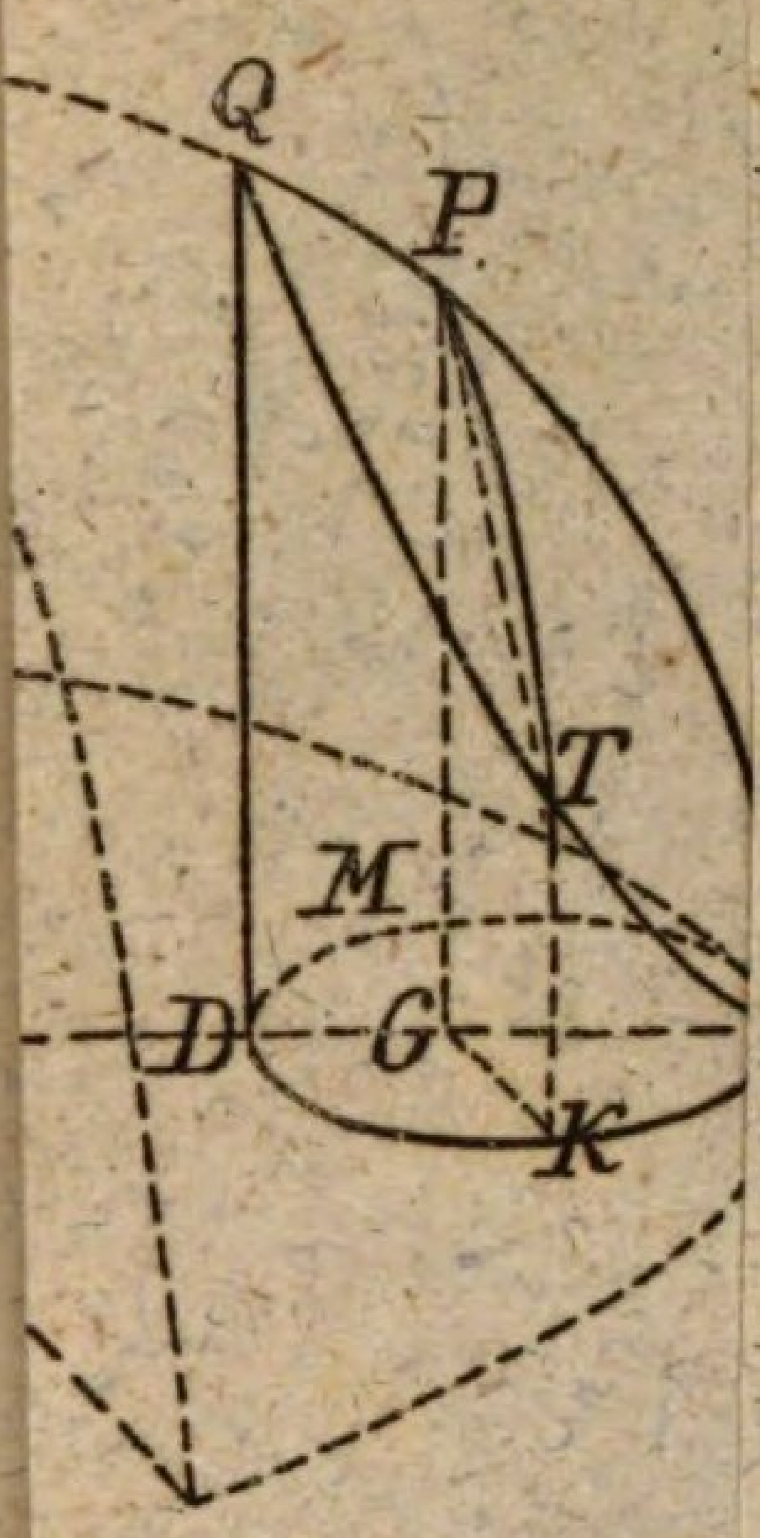
.27.

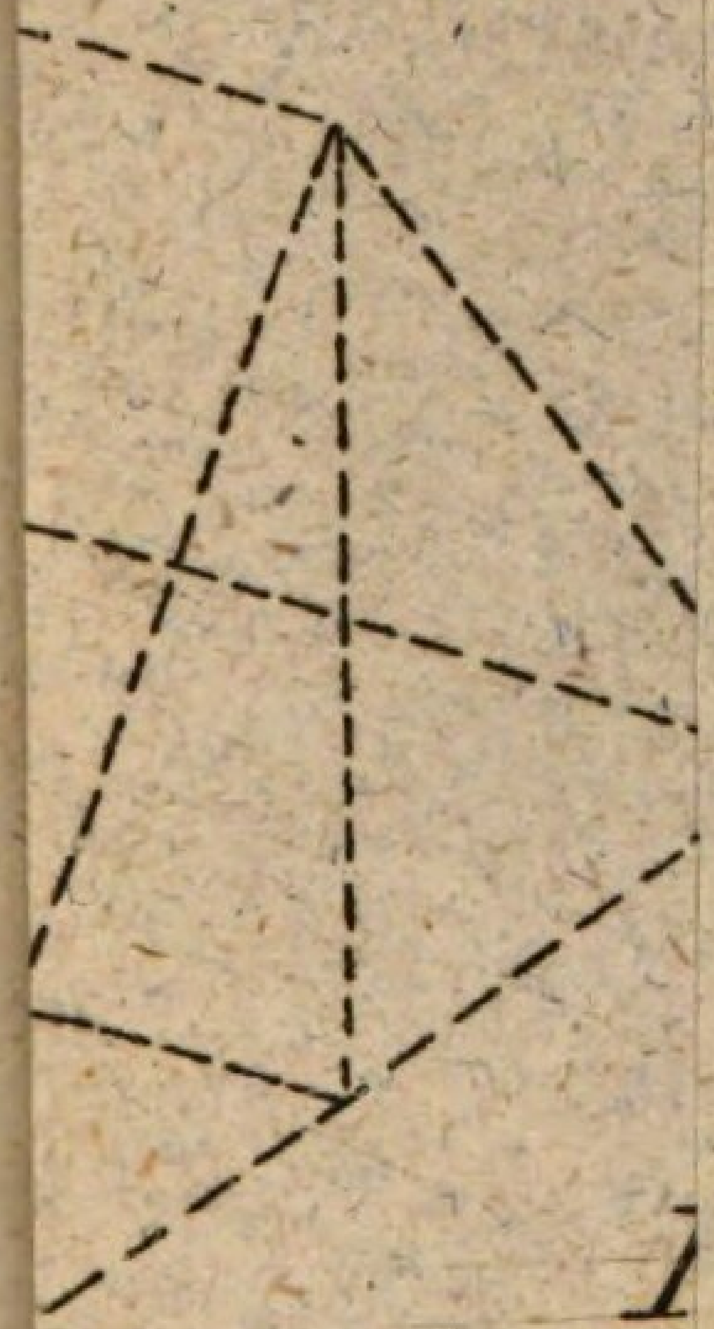


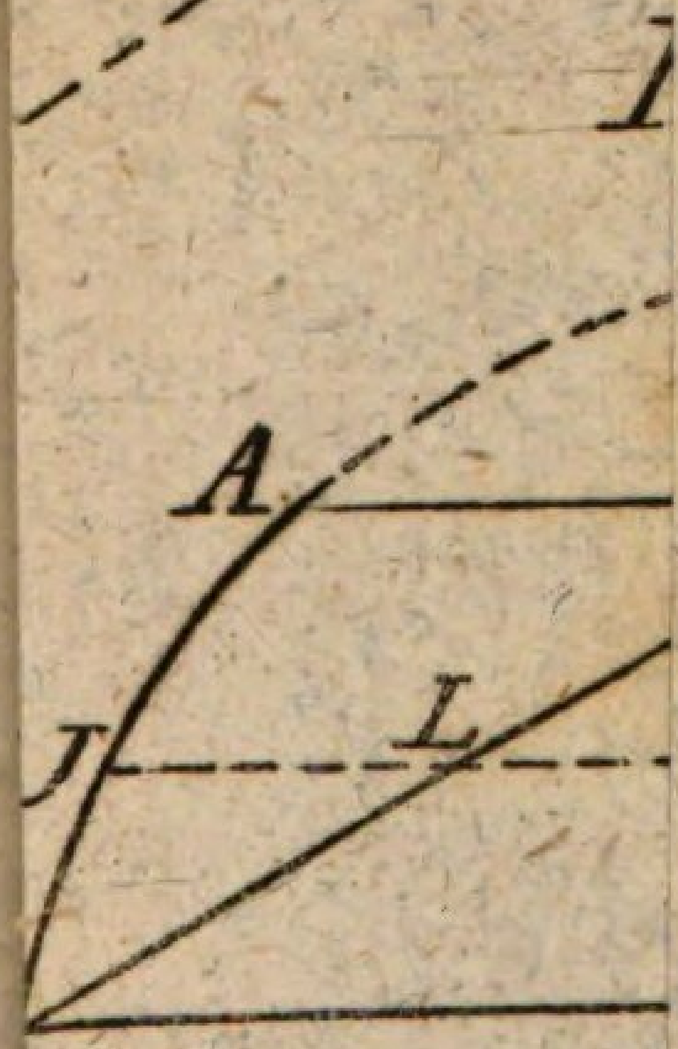

B
R
K

R
F
Q


A


Q
P
T
M
D
G
K




A
J
L

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lehmus, Daniel Christian Ludolph,

Aufgaben aus der Körperlehre

Halle 1811

Math.p. 304
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082288-3